

# 20012 Höhere Mathematik III

## Lösungshinweise zu den Einsendeaufgaben 6.1

(Einsendetermin: 23. Februar 2003)

**Aufgabe 1** *Es werden zwei Würfel geworfen.*

(i) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:*

*A: Es erscheint beide Male eine gerade Zahl*

*B: Es erscheint eine 2 und eine 3*

*C: Es erscheint mindestens eine 2 oder eine 3*

(ii) *Bestimmen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten*

$$p(A|B) , \quad p(B|A)$$

$$p(C|B) , \quad p(B|C)$$

$$p(A|C) , \quad p(C|A)$$

(iii) *Welche Ereignisse sind stochastisch unabhängig?*

[ Punktzahl:  $4 + 6 + 3 = 13$  ]

**Lösung 1.** Es sind insgesamt  $6^2 = 36$  Elementarereignisse möglich.

(i) Gerade Augenzahlen sind 2, 4, 6, also ist die Anzahl „gerader“ Elementarereignisse

$$3^2 = 9 ,$$

somit

$$p(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} .$$

Das Ereignis B besteht aus zwei Möglichkeiten: 2,3 und 3,2 , also

$$p(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} .$$

Die Anzahl der Elementarereignisse mit einer (oder zwei) Zweien ist

$$6 + 6 - 1 = 11$$

(sechs Möglichkeiten mit einer Zwei in der ersten Stelle, sechs mit einer Zwei in der zweiten; dabei ist die Kombination 2,2 doppelt gezählt, also muss 1 abgezogen werden). Gleiches gilt für eine (oder zwei) Dreien. Insgesamt haben wir dann

$$11 + 11 - 2 = 20$$

Möglichkeiten (−2, weil sonst die beiden Elementarereignisse 2,3 und 3,2 doppelt gezählt wären!). Also

$$p(C) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} .$$

- (ii) Das Ereignis  $A \cap B$  ist leer, denn es können bei 2,3 und 3,2 nicht beide Zahlen gerade sein:

$$p(A \cap B) = 0 , \quad p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0}{\frac{1}{18}} = 0$$

und dann auch

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{0}{\frac{1}{4}} = 0 .$$

Offenbar ist  $B \subseteq C$  , also ist

$$B \cap C = B$$

und

$$p(C|B) = \frac{p(B \cap C)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

(d.h. unter der Bedingung B ist das Ereignis C sicher) sowie

$$p(B|C) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \frac{p(B)}{p(C)} = \frac{9}{5 \cdot 18} = \frac{1}{10} .$$

Das Ereignis  $A \cap C$  besteht aus den Würfeln

$$2, 2 , \quad 2, 4 , \quad 2, 6 , \quad 4, 2 , \quad 6, 2 .$$

Also ist  $p(A \cap C) = \frac{5}{36}$  und

$$p(A|C) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{5 \cdot 9}{36 \cdot 5} = \frac{1}{4} ,$$

$$p(C|A) = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = \frac{5 \cdot 4}{36} = \frac{5}{9} .$$

- (iii) Es ist  $p(A|B) \neq p(A)$  (oder auch  $p(B|A) \neq p(B)$ ), also sind A und B nicht unabhängig. Weiter ist  $p(B|C) \neq p(B)$  (oder auch  $p(C|B) \neq p(C)$ ), also sind B und C nicht unabhängig.

Dagegen ist  $p(A|C) = p(A)$  (und auch  $p(C|A) = p(C)$ ), also sind die Ereignisse A und C unabhängig.

**Aufgabe 2** Im Pokerspiel befinden sich in 4 Farben jeweils 13 Karten

2 3 4 5 6 7 8 9 10 B D K A .

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Blatt aus fünf Karten

(i) ein Vierling oder Poker (vier gleich hohe Karten)

(ii) ein Flush (alle fünf Karten haben die gleiche Farbe)

gezogen wird.

[ Punktzahl: 3 + 3 = 6 ]

**Lösung 2.** Die Reihenfolge der Karten im Blatt ist irrelevant. Also gibt es (Kombinationen ohne Wiederholung)

$$\binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

mögliche Blätter.

(i) Ein *Vierling* oder *Poker* entsteht bei  $13 \cdot 48$  verschiedenen Blättern (die fünfte Karte kann unter den 48 verbleibenden jeweils beliebig gewählt werden). Also ist

$$p(A) = \frac{13 \cdot 48 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 0.00024 .$$

(ii) Aus einer festen Farbe kann man

$$\binom{13}{5}$$

verschiedene Blätter zusammenstellen, bei vier Farben also insgesamt

$$4 \cdot \binom{13}{5} .$$

Somit ist

$$p(A) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} \approx 0.00198 .$$

**Aufgabe 3** Die Verteilungsdichte der Variablen  $x$  ist gegeben mit

(a)  $f(x) = \frac{c}{x^4}$  ,  $1 < x < \infty$  ,

(b)  $f(x) = cxe^{-2x^2}$  ,  $0 < x < \infty$  .

(i) Bestimmen Sie jeweils die Konstante  $c$  (es muss jeweils  $\int f(x) dx = 1$  gelten).

(ii) Bestimmen Sie jeweils die Verteilungsfunktion  $F$ .

(iii) Bestimmen Sie jeweils den Erwartungswert  $m$ .

(iii) Berechnen Sie jeweils die Dispersion (Varianz)

$$\sigma^2 = \int (x - m)^2 f(x) dx .$$

*Hinweis: Benutzen Sie die Formel*

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

[ Punktzahl:  $(1 + 1 + 1 + 3) + (2 + 2 + 2 + 4) = 16$  ]

**Lösung 3.** (a)

(i) Aus

$$1 = c \int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = c \left( -\frac{1}{3x^3} \right) \Big|_1^\infty = \frac{c}{3}$$

folgt  $c = 3$ .

(ii)

$$F(x) = \int_1^x f(\xi) d\xi = 3 \int_1^x \frac{d\xi}{\xi^4} = 3 \left( -\frac{1}{3\xi^3} \right) \Big|_1^x = \left( 1 - \frac{1}{x^3} \right) .$$

(iii)

$$m = \int_1^\infty xf(x) dx = 3 \int_1^\infty \frac{x dx}{x^4} = 3 \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = 3 \left( -\frac{1}{2x^2} \right) \Big|_1^\infty = \frac{3}{2} .$$

(iv) Zu berechnen ist

$$\sigma^2 = \int_1^\infty (x - m)^2 f(x) dx = \int_1^\infty (x^2 - 2xm + m^2) f(x) dx = \int_1^\infty x^2 f(x) dx - m^2$$

(der Verschiebungssatz – benutzt wurden dabei

$$m = \int_1^\infty xf(x) dx \text{ und } \int_1^\infty f(x) dx = 1 .)$$

Also weiter

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_1^\infty x^2 f(x) dx - m^2 = 3 \int_1^\infty \frac{x^2 dx}{x^4} - m^2 = 3 \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} - m^2 \\ &= 3 \left( -\frac{1}{x} \right) \Big|_1^\infty - m^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b)

(i) Aus

$$1 = c \int_0^\infty x e^{-2x^2} dx = -\frac{c}{4} \int_0^\infty -4x e^{-2x^2} dx = -\frac{c}{4} e^{-2x^2} \Big|_0^\infty = \frac{c}{4}$$

folgt  $c = 4$ .

(ii)

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi = \int_0^x 4\xi e^{-2\xi^2} d\xi = - \left( e^{-2\xi^2} \right) \Big|_0^x = \left( 1 - e^{-2x^2} \right).$$

(iii) Mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}m &= \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty 4x^2 e^{-2x^2} dx = - \int_0^\infty x(-4x e^{-2x^2}) dx \\ &= -x e^{-2x^2} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-2x^2} dx = \int_0^\infty e^{-2x^2} dx.\end{aligned}$$

Mit der Substitution  $\sqrt{2}x = \xi$ ,  $dx = d\xi/\sqrt{2}$  :

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

(iv) Zu berechnen ist (siehe (a))

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_1^\infty x^2 f(x) dx - m^2 = \int_0^\infty 4x^3 e^{-2x^2} dx - m^2 = - \int_0^\infty x^2(-4x e^{-2x^2}) dx - m^2 \\ &= -x^2 e^{-2x^2} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-2x^2} dx - m^2 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty (-4x e^{-2x^2}) dx - m^2 \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2x^2} \Big|_0^\infty - m^2 = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8},\end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}}.$$

**Aufgabe 4** Für die Verteilungsdichte der Variablen  $-\frac{1}{2} < x < 1$  auf der Abbildung 1 bestimmen Sie

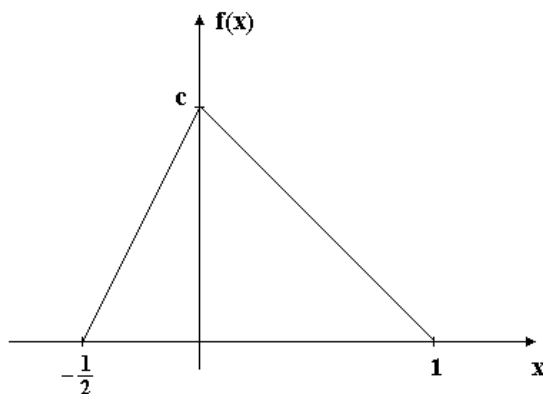


Abbildung 1:

- (i) die Konstante  $c$  ,
- (ii) die Verteilungsfunktion  $F(x)$  ,
- (iii) den Erwartungswert  $m$  .

[ Punktzahl: 1 + 2 + 2 = 5 ]

**Lösung 4.** Es ist

$$f(x) = \begin{cases} 2c(x + \frac{1}{2}) & , \quad -\frac{1}{2} < x < 0 \\ -c(x - 1) & , \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

- (i) Das Integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$$

ist als die Oberfläche der Dreiecke unmittelbar anzugeben als

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot c = \frac{3c}{4} .$$

Aus der Forderung  $\frac{3c}{4} = 1$  folgt

$$c = \frac{4}{3} .$$

(ii) Für  $-\frac{1}{2} < x < 0$  ist

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^x \frac{8}{3}(\xi + \frac{1}{2})d\xi = \left( \frac{4}{3}\xi^2 + \frac{4}{3}\xi \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^x \\ &= \frac{4x^2}{3} + \frac{4x}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4x^2}{3} + \frac{4x}{3} + \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Für  $0 < x < 1$  ist

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^x f(\xi)d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(\xi)d\xi + \int_0^x f(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{3} + \int_0^x \left(-\frac{4}{3}\right)(\xi - 1)d\xi = \frac{1}{3} + \left( -\frac{2\xi^2}{3} + \frac{4\xi}{3} \right) \Big|_0^x \\ &= -\frac{2x^2}{3} + \frac{4x}{3} + \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $F(-\frac{1}{2}) = 0$  und  $F(1) = 1$ , wie erwartet. Skizze:

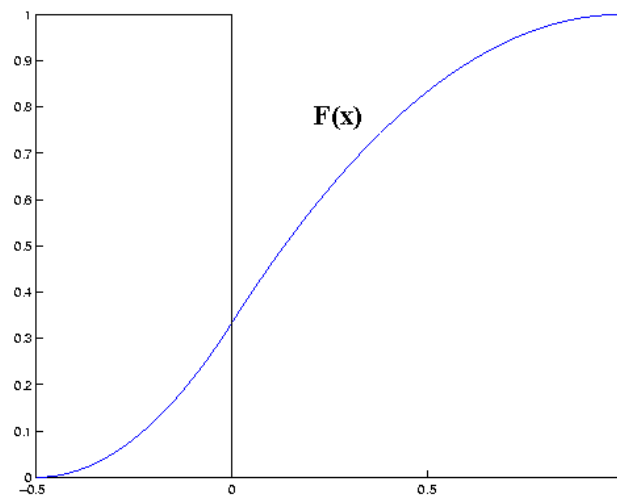


Abbildung 2:

(iii)

$$\begin{aligned} m &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 x f(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \frac{8}{3}(x + \frac{1}{2})dx + \int_0^1 x \left(-\frac{4}{3}\right)(x - 1)dx \\ &= \left( \frac{8x^3}{9} + \frac{2x^2}{3} \right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^0 + \left( -\frac{4x^3}{9} + \frac{2x^2}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} . \end{aligned}$$

**Aufgabe 5** Gegeben sind die Werte

$$\begin{array}{lll} t_1 = 1 & , & t_2 = 2 & , & t_3 = 3 \\ x_1 = 3 & , & x_2 = 2 & , & x_3 = 0.5 \end{array}$$

Passen Sie diesen Werten

(a) eine Gerade  $x = bt + a$  ,

(b) eine Hyperbel  $x = a + \frac{b}{t}$

an. Machen Sie Skizzen.

[ Punktzahl: 3 + 4 = 7 ]

### Lösung 5.

(a) Für die lineare Anpassung haben wir ((66.3))

$$\frac{11}{2} = 3a + (1 + 2 + 3)b$$

$$\frac{17}{2} = (1 + 2 + 3)a + (1^2 + 2^2 + 3^2)b$$

mit der Lösung

$$b = -1.25 , \quad a = \frac{13}{3} .$$

Skizze:

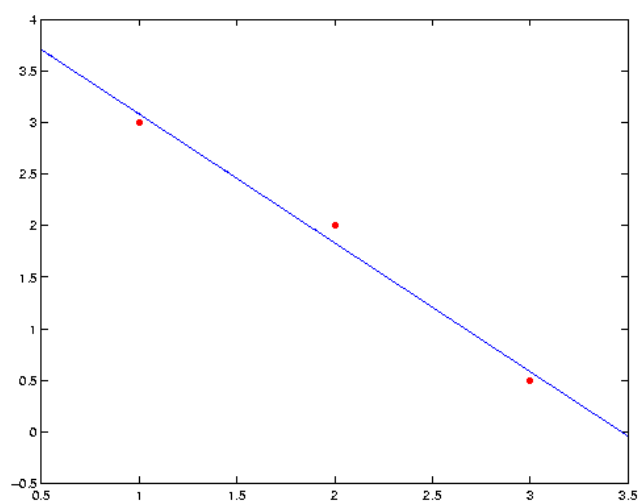


Abbildung 3:

(b) Wir verlangen

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^3 \left( x_i - a - \frac{b}{t_i} \right)^2 = \min. ,$$

d.h.

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^3 \left( x_i - a - \frac{b}{t_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 x_i = 3a + b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{t_i}$$

und

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^3 \frac{1}{t_i} \left( x_i - a - \frac{b}{t_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \frac{x_i}{t_i} = a \sum_{i=1}^3 \frac{1}{t_i} + b \sum_{i=1}^3 \frac{1}{t_i^2} ,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{11}{2} &= 3a + b \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \\ 3 + 1 + \frac{1}{6} &= a \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + b \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$b = 3.3462... , \quad a = -0.2115... .$$

Skizze:

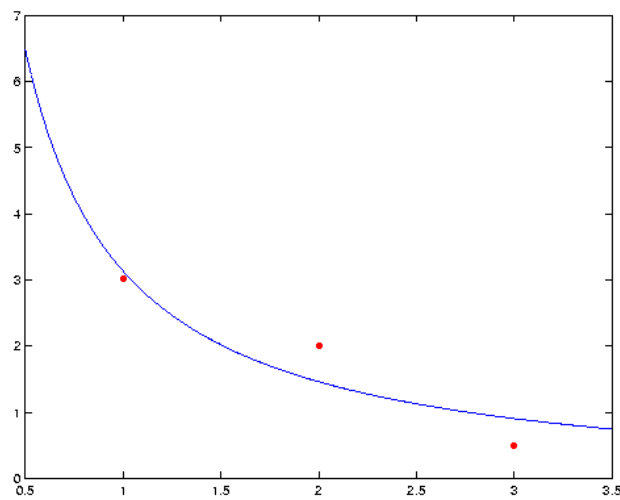


Abbildung 4: