

## Graphen, Algorithmen und Netze

Kurseinheit 1:  
Grundbegriffe

Autoren:  
Prof. Dr.-Ing. Firoz Kaderali  
Prof. Dr. rer. nat. Werner Poguntke



## Vorwort zum Kurs

Die Graphentheorie ist heute ein wichtiges Hilfsmittel beim Studium komplexer Probleme in verschiedenen Wissenschaften wie auch in direkten Anwendungsbereichen.

Der universelle Charakter der Graphentheorie hat seinen Ursprung in der Einfachheit der Struktur von Graphen: die Konzepte und Ergebnisse der Graphentheorie sind immer dann anwendbar, wenn ein System zu modellieren ist, in dem Paare von Objekten in einer Beziehung stehen können. Die strukturelle Einfachheit (und damit auch Anschaulichkeit) zusammen mit dem interdisziplinären Charakter geben der Graphentheorie viel von ihrem besonderen Reiz. Bei einer Modellierung durch Graphen bleiben natürlich stets (mitunter wichtige) Aspekte des zu untersuchenden Systems unberücksichtigt, weshalb die erzielten Ergebnisse mit Zurückhaltung interpretiert werden müssen. Dies dürfte besonders für sozialwissenschaftliche Anwendungen der Graphentheorie zutreffen.

Historisch hat die Graphentheorie viele Ursprünge, die oft aus Rätseln oder Spielen erwachsen sind. Viele Konzepte und Ergebnisse sind dabei mehrfach eingeführt bzw. erzielt worden. Einige markante Stationen sollen hier aufgeführt werden:

1737 Euler löst das Königsberger Brückenproblem.

1847 Kirchhoff verwendet graphentheoretische Überlegungen zur Analyse elektrischer Netzwerke.

1852 Guthrie wirft gegenüber deMorgen die Vierfarbenvermutung als Problem auf, das 1878/79 von Cayley noch einmal öffentlich gestellt wird.

1857 Cayley untersucht die Isomeren gesättigter Kohlenwasserstoffe und bestimmt die Anzahl der Gerüste vollständiger Graphen.

1859 Hamilton erfindet ein Spiel, bei dem entlang der Kanten eines regulären Dodekaeders eine geschlossene Linie zu finden ist, die jede Ecke genau einmal berührt.

1890 Heawood beweist, daß jeder planare Graph 5-färbbar ist.

1927 Menger beweist, daß in jedem zusammenhängenden Graphen die Mindestanzahl von Ecken, deren Wegnahme zwei nicht benachbarte Punkte unverbundbar macht, gleich der Maximalzahl eckendisjunkter Wege zwischen diesen Punkten ist.

1930 Kuratowski beweist, daß ein Graph genau dann planar ist, wenn er bis auf Homöomorphie  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  nicht als Teilgraphen enthält.

1936 Das erste Buch über Graphentheorie erscheint in Leipzig: D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.

Hier wollen wir die Aufzählung abbrechen. Die folgende Zeit ist gekennzeichnet durch das Eindringen der Graphentheorie in immer mehr Anwendungsbereiche, auf

der anderen Seite durch eine intensive innermathematische Entwicklung der Graphentheorie selbst. Dabei bestimmt neben den Anstößen von außen zunehmend auch eine innermathematische Dynamik diese Entwicklung.

Besonders stürmisch wurde die Entwicklung der Graphentheorie in den letzten Jahrzehnten durch die Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Rechner. Wie allgemein für die sog. Kombinatorische Optimierung gilt insbesondere für die Graphentheorie, daß viele Probleme praktisch lösbar wurden, nachdem sie vorher wegen der großen Anzahl durchzuführender Rechenoperationen nicht in vertretbarer Zeit bearbeitet werden konnten. Viele dieser Probleme kommen aus Operations Research oder Informatik.

Eine besondere Station in der Entwicklung der Graphentheorie muß allerdings noch herausgehoben werden: im Jahre 1976 bewiesen Appel und Haken die Richtigkeit der Vierfarbenvermutung, die mehr als hundert Jahre lang als einfachsten und zugleich faszinierendsten ungelösten Probleme der Mathematik gegolten hatte. Brisant an dem Beweis ist, dass zur Untersuchung einer großen Anzahl gleichartiger Fälle die Hilfe eines Computers in Anspruch genommen wurde und es für Menschen praktisch kaum möglich ist, diese Fälle einzeln (ohne Hilfe eines Rechners) nachzuprüfen.

Im vorliegenden Kurs ist die Auswahl des gebotenen Stoffes hauptsächlich unter dem Aspekt der Anwendungen in der Elektrotechnik erfolgt. Dies konnte nur eine grobe Leitlinie sein, denn schon die Einordnung des Stoffes in das "Gebäude" der Graphentheorie verlangt auch ein Eingehen auf nicht unmittelbar praxisrelevante Bereiche. Im zweiten Teil des Kurses spielen insbesondere "Zufallsgraphen" eine große Rolle. Auf Färbungsprobleme wird in dem Kurs nicht eingegangen, obwohl das Vierfarbenproblem auch für die Herausbildung der Graphentheorie von zentraler Bedeutung war.

Methodisch wird in dem Kurs der Stoff vorwiegend vom algorithmischen Standpunkt her entwickelt. Für ein solches Vorgehen ist ein kurzes Eingehen auf die Theorie der Algorithmen, wie sie in Logik und Theoretischer Informatik betrieben wird, nötig.

Der erste Teil des Kurses hat neben der Vermittlung der grundlegenden Begriffe der Graphentheorie das Herstellen eines Grundverständnisses für die Theorie der Algorithmen zum Inhalt. Ferner werden einige der "klassischen" Graphenalgorithmen behandelt (z. B. zur Bestimmung kürzester Wege), die in verschiedensten Anwendungen eine Rolle spielen.

Der zweite Teil des Kurses ist einigen speziellen Anwendungen der Graphentheorie in der Elektrotechnik gewidmet.

Die behandelten mathematischen Sätze werden in der Regel vollständig bewiesen. Es gibt zwei Ausnahmen von dieser Regel: Handelt es sich um einen Satz mit einem technisch komplizierten Beweis, so dass der große Aufwand des Beweises zu der Bedeutung des Satzes für diesen Kurs in einem Mißverhältnis steht, so wird nur die Beweisidee angedeutet. Geht es gar um einen Satz, der eigentlich nicht zu dem

Stoff dieses Kurses gehört, sondern mehr dem Ausblick auf angrenzende Bereiche der Graphentheorie dient, so ist der Beweis ganz weggelassen.

An Voraussetzungen für das Studium des Kurses sind nötig die Vertrautheit mit der Mengensprache sowie Kenntnis der Grundlagen der Linearen Algebra (einschließlich des Umgangs mit Matrizen). Die wichtigsten Begriffe aus diesen Bereichen sind - sozusagen zur Erinnerung - in Anhängen kurz erläutert.

Das Literaturverzeichnis führt die bei der Erstellung des ersten Teils verwendete Literatur sowie einige weitere Bücher auf, die anzusehen für einen Leser sicher lohnend ist. Es erhebt jedoch nicht den Anspruch, eine vollständige Bibliographie des Gebietes der Graphentheorie zu sein, eine solche wäre wesentlich umfangreicher.

Die vorliegende Fassung des Kurses ist eine Überarbeitung der ersten Version, die ab 1990 an der Fernuniversität angeboten wurde. Für den ersten Teil des Kurses wurden auch die Unterlagen zu Vorlesungen verwendet, die - jeweils an der Technischen Hochschule Darmstadt - vom ersten Autor zusammen mit Prof. Dr. P. Burmeister im Jahre 1975 und vom zweiten Autor im Jahre 1982 gehalten wurden.

## Autorenvorstellung

### Prof. Dr.-Ing. Firoz Kaderali



1963-69	Studium der Theoretischen Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt
1969-72	Assistent/Dozent für Statistische Signaltheorie an der Technischen Hochschule Darmstadt
1974	Promotion auf dem Gebiet der Netzwerktheorie an der Technischen Hochschule Darmstadt
1976-81	Projektleiter (Digitales Ortsnetz) im Forschungszentrum der Firma SEL (ITT)/Stuttgart
1981-86	Hauptabteilungsleiter (Systementwicklung Großsysteme) bei (Bosch) Telefonbau und Normalzeit/Frankfurt
Seit 1986	Professor für Kommunikationssysteme an der FernUniversität Hagen Arbeitsgebiete: Kommunikationssysteme, -netze und -protokolle; Datenschutz und Datensicherheit in Kommunikationsnetzen; Einsatz von neuen Medien in der Lehre
1989-94	Leiter der Projektträgerschaft TELETECH NRW
1990-96	Mitglied der ISDN Forschungskommission des Landes NRW
Seit 1992	Direktor des Forschungsinstituts für Telekommunikation (FTK)/Dortmund
1995 - 2001	Mitglied der Steuerungsgruppe der Landesinitiative media NRW
1999 - 2002	Sprecher des Forschungsverbundes Datensicherheit NRW
2000-2002	Vorsitzender des Beirates der Gesellschaft für IT-Sicherheit in Bochum
Seit 2002	Vorsitzender der Open Source Initiative CampusSource

**Prof. Dr. rer. nat. Werner Poguntke**

- |             |  |
|-------------|--|
| 1968 - 1971 | Studium der Mathematik und Physik an der Universität Bonn  |
| 1971 - 1972 | Studium der Mathematik und Physik an der TH Darmstadt  |
| 1974        | Promotion in Mathematik auf dem Gebiet der Verbandstheorie an der TH Darmstadt                     |
| 1974 - 1980 | Wissenschaftlicher Angestellter im Fachbereich Mathematik der TH Darmstadt                         |
| 1978/79     | Forschungsaufenthalt in Kanada   |
| 1980 - 1985 | Hochschulassistent im Fachbereich Mathematik der TH Darmstadt                                      |
| 1981        | Habilitation in Mathematik an der TH Darmstadt   |
| 1985 - 1988 | Tätigkeit in der Software-Entwicklung für Vermittlungsanlagen bei der Firma Telenorma in Frankfurt |
| 1988 - 1994 | Wissenschaftlicher Angestellter im Lehrgebiet Kommunikationssysteme der Fernuniversität Hagen      |
| Seit 1994   | Professor für Angewandte Informatik an der Fachhochschule Südwestfalen                             |

## Literaturverzeichnis

- [BUS] Busacker, R.G.; Saaty, T.L. *Endliche Graphen und Netzwerke* Oldenbourg, 1968
- [CHA] Chan, S. P. *Introductory topological analysis of el. networks* Holt Rinehart and Winston, 1969
- [CHE] Chen, W.K. *Applied graph theory* North Holland, 1971
- [DEO] Deo, N. *Graph theory with applications to engineering and computer science* Prentice Hall, 1974
- [FOR] Ford, L.R.; Fulkerson, D.R. *Flows in networks* Princeton University Press, 1962
- [GAR] Garey, M.R.; Johnson, D.S. *Computers and Intractability* W.H. Freeman, 1979
- [GOU] Gould, R. *Graph theory* Benjamin/Cummings 1988
- [HAR] Harary, F. *Graph theory* Addison-Wesley, 1969
- [JUN] Jungnickel, D. *Graphen, Netzwerke und Algorithmen* B.I., 1987
- [KOE] König, D. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* Chelsea, 1950
- [MAY] Mayeda, W. *Graph theory* Wiley, 1972
- [ORE 1] Ore, O. *Theory of graphs* Am. Math. Soc., Coll. Pub., 1962
- [ORE 2] Ore, O. *Graphs and their uses* Random House, 1963
- [PAP] Papadimitriou, C.H.; Steiglitz, K. *Combinatorial Optimization* Prentice-Hall, 1982
- [REA] Read, E. *Graph theory and computing* Academic Press, 1972
- [SES] Seshu, S.; Reed, M. *Linear graphs and electrical networks* Addison Wesley, 1961
- [SWA] Swamy, M.N.S.; Thularisaman, K. *Graphs, networks and algorithms* Wiley Interscience, 1981
- [WIL] Wilson, R.J. *Introduction to graph theory* Academic Press, 1972



# Inhaltsverzeichnis der Kurseinheit

<b>Vorwort zum Kurs</b> .....	<b>iii</b>
<b>Autorenvorstellung</b> .....	<b>vi</b>
Prof. Dr.-Ing. Firoz Kaderali .....	vi
Prof. Dr. rer. nat. Werner Poguntke .....	vii
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>viii</b>

## Kurseinheit 1

<b>Einleitung</b> .....	<b>x</b>
<b>1 Grundbegriffe</b> .....	<b>1-1</b>
1.1 Pseudographen, Multigraphen, Graphen .....	1-1
1.2 Wege, Kreise, Zusammenhang .....	1-11
<b>Lösungshinweise</b> .....	<b>1-23</b>
<b>A Kurze Übersicht der verwendeten Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre</b> .....	<b>1-25</b>
<b>Index</b> .....	<b>1-27</b>

## Einleitung

Die erste Kurseinheit enthält neben den Definitionen eines (ungerichteten) Graphen und gewisser Verallgemeinerungen die wichtigsten Grundbegriffe sowie einige daraus unmittelbar ableitbare Sätze. Anhand vieler Diagramme in den Beispielen wird versucht, dem Leser eine anschauliche Vorstellung der eingeführten Begriffe zu ermöglichen. Diese Begriffe erscheinen einzeln als nicht sehr schwierig, doch wegen ihrer großen Zahl empfiehlt es sich, langsam vorzugehen und das eigene Verständnis anhand der Selbsttestaufgaben zu überprüfen. Die Kurseinheit wurde aus diesen Gründen vom Umfang her recht knapp gehalten. In einem Anhang sind die verwendeten Begriffe und Schreibweisen aus der Mengenlehre zusammengestellt und kurz erläutert. Dabei stützen wir uns in den Bezeichnungen weitgehend auf den Kurs "Naive Mengenlehre" Nr. 1100/1101.

# 1 Grundbegriffe

## 1.1 Pseudographen, Multigraphen, Graphen

### Definition 1.1-1: Pseudograph

Ein **Pseudograph** ist ein Tripel  $P = (E, K, v)$  bestehend aus einer Eckenmenge  $E$ , einer Kantenmenge  $K$  und einer (Inzidenz-) Abbildung

$$v : K \rightarrow \{\{x, y\} | x, y \in E\}.$$

Die Elemente von  $E$  heißen **Ecken**, die von  $K$  **Kanten**.

Ist  $k \in K$  mit  $v(k) = \{x, y\}$ , so heißen  $x$  und  $y$  die **Endecken** von  $k$ . (Man sagt auch:  $x$  und  $y$  **inzidieren** mit  $k$  bzw.  $k$  **inzidiert** mit  $x$  und  $y$ .)

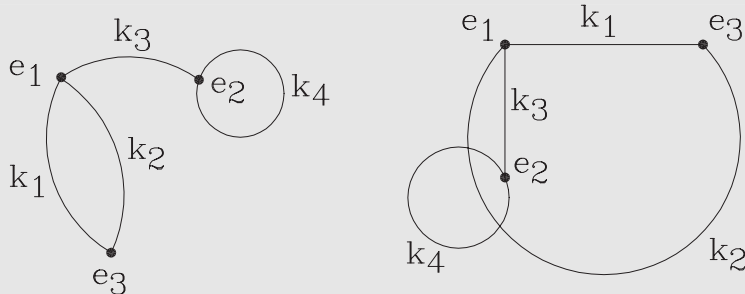
**Ecken**  
**Kanten**  
**Endecken einer Kante**

Es werden im folgenden nur **endliche Pseudographen** (d. h.  $E$  und  $K$  sind endliche Mengen) betrachtet. Einen endlichen Pseudographen kann man sich stets durch ein **Diagramm** veranschaulichen: die Ecken werden durch Punkte der Zeichenebene dargestellt, die Kanten als Linien, die die Endecken der Kante verbinden.

**endliche**  
**Pseudographen**  
**Diagramme**

### Beispiel 1.1-1:

Der Pseudograph  $P$  mit  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$  und  $v(k_1) = v(k_2) = \{e_1, e_3\}$ ,  $v(k_3) = \{e_1, e_2\}$ ,  $v(k_4) = \{e_2\}$  wird durch jedes der beiden folgenden Diagramme dargestellt:



### Definition 1.1-2: Parallelkante

Zwei oder mehrere Kanten, die mit denselben Ecken inzidieren, heißen **Parallelkanten**.

**Parallelkanten**

### Definition 1.1-3: Schleife

Eine Kante  $k$  mit zwei gleichen Endecken (d. h. es gilt  $v(k) = \{x\}$ ) ist eine (Selbst-) **Schleife**.

**Schleifen**

**Definition 1.1-4: Multigraph**

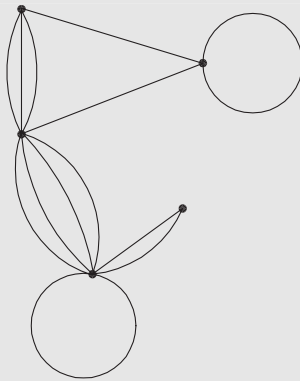
**Multigraph** Ein Pseudograph ohne Schleifen heißt **Multigraph**.

**Definition 1.1-5: Graph**

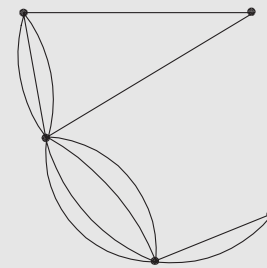
**Graph** Ein Multigraph ohne Parallelkanten heißt **Graph**.

**Beispiel 1.1-2:**

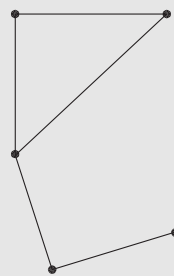
Beispiele durch Diagramme:



Pseudograph  
(kein Multigraph)



Multigraph  
(kein Graph)



Graph

Da in einem Graphen jede Kante durch ihre zwei verschiedenen Endecken eindeutig bestimmt ist, kann ein Graph auch als ein Paar  $G = (E, K)$  mit

$$K \subseteq \{\{x, y\} | x, y \in E, x \neq y\}$$

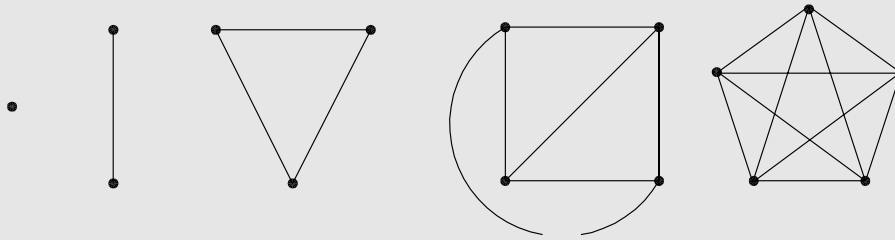
aufgefasst werden. Diese Definition wird in der Literatur häufig verwendet. Einen Graphen im Sinne von Definition 1.1-1 bekommt man dann, indem man  $v(k) := k$  für jedes  $k \in K$  setzt.

**Definition 1.1-6: Vollständiger Graph**

**vollständiger Graph** Ein Graph heißt **vollständig** oder auch ein **Simplex**, wenn je zwei verschiedene Ecken des Graphen durch eine Kante verbunden sind.

**Beispiel 1.1-3:**

In den folgenden Diagrammen sind vollständige Graphen dargestellt.

**Definition 1.1-7: Benachbarte Ecken**

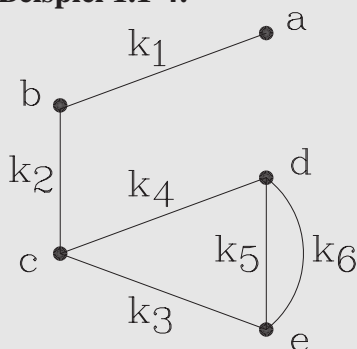
Zwei **Ecken**  $a, b \in E$  in einem Pseudographen  $P$  heißen **benachbart**, wenn ein  $k \in K$  mit  $v(k) = \{a, b\}$  existiert.

**benachbarte Ecken**

**Definition 1.1-8: Benachbarte Kanten**

Zwei **Kanten**  $k_1, k_2 \in K$  heißen **benachbart** in  $P$ , wenn  $v(k_1) \cap v(k_2) \neq \emptyset$  gilt, d. h. wenn sie in mindestens einer Ecke gemeinsam inzident sind.

**benachbarte Kanten**

**Beispiel 1.1-4:**

$a$  und  $b$  sind benachbart,  
 $a$  und  $d$  nicht,  
 $k_4$  und  $k_5$  sind benachbart,  
 $k_5$  und  $k_6$  sind benachbart,  
 $k_1$  und  $k_4$  nicht.

**Definition 1.1-9:**  $P$  sei ein Pseudograph,  $a \in E$ . Dann heißt die Anzahl der an  $a$  inzidenten Kanten (wobei eine Kante, die zweifach an  $a$  inzident ist, auch doppelt gezählt wird) der **Eckengrad** (kurz: **Grad**) von  $a$  in  $P$  und wird mit  $\gamma(a, P)$  bzw. nur  $\gamma(a)$  bezeichnet.

Für einige Sonderfälle werden zusätzliche Begriffe benutzt:

**Definition 1.1-10: Isolierte Ecke**

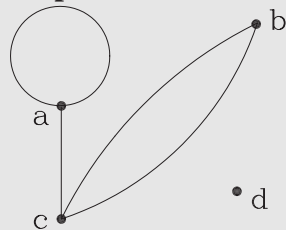
**isolierte Ecke** Ist  $\gamma(a, P) = 0$ , so heißt  $a$  eine **isolierte Ecke** von  $P$ .

**Definition 1.1-11: n-regulär**

**n-regulärer Pseudograph** Haben alle Ecken von  $P$  den gleichen Grad  $n$ , so heißt  $P$  **n-regulär**.

**Definition 1.1-12: Nullgraph**

**Nullgraph** Der Pseudograph ohne Ecken und Kanten ( $E = K = \emptyset$ ) heißt auch **leerer Graph** oder **Nullgraph**.

**Beispiel 1.1-5:**

Es ist  $\gamma(a) = \gamma(c) = 3$ ,  $\gamma(b) = 2$ ,  $\gamma(d) = 0$ ;  $d$  ist eine isolierte Ecke.

Als nächstes werden zwei Gesetzmäßigkeiten nachgewiesen, denen die Zahlen  $\gamma(a, P)$  in einem beliebigen Pseudographen unterliegen.

**Satz 1.1-1:** Für jeden Pseudographen  $P$  gilt

$$\sum_a \gamma(a, P) = 2|K|.$$

(Man prüfe die Formel an Beispiel 1.1-5 nach.)

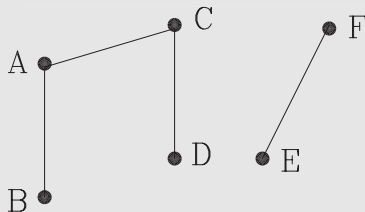
**Beweis:** Da jede Kante bei der Bildung der Summe der Eckengrade genau zweimal gezählt wird (je einmal bei jeder der beiden Endecken), ergibt sich die Behauptung sofort.

**Satz 1.1-2:** In jedem Pseudographen  $P$  gibt es eine gerade Anzahl von Ecken mit ungeradem Eckengrad.

**Beweis:** Aufgrund von Satz 1.1-1 ist die Summe aller Eckengrade eine gerade Zahl. Durch Subtrahieren aller geraden Eckengrade von dieser Zahl bleibt eine gerade Zahl übrig, die nun die Summe aller ungeraden Eckengrade ist. Dies kann aber nur dann der Fall sein, wenn die Summe aller ungeraden Eckengrade eine gerade Anzahl von Summanden hat.

**Beispiel 1.1-6:**

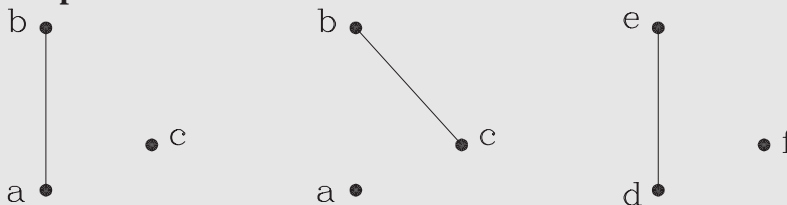
Wir nehmen an, unter sechs Freunden A, B, C, D, E und F hätten an einem Tag eine Reihe von Telefongesprächen stattgefunden. Die Personen können als Ecken und die stattgefundenen Telefongespräche als Kanten eines Graphen aufgefasst werden. So könnte sich z. B. folgender Graph ergeben:



**Abb. 1.1-1:** (A und B haben miteinander telefoniert, D und E nicht, etc.)

Satz 1.1-1 und Satz 1.1-2 ergeben nun allgemeingültige Aussagen über die Anzahlen der geführten Telefongespräche. So wäre es z. B. nicht möglich, dass A drei, B zwei, C ein, D vier, E zwei und F drei Telefongespräche geführt hat, denn  $3 + 2 + 1 + 4 + 2 + 3$  ist 15 und somit ungerade.

Wir kommen nun zu dem zentralen Begriff der **Isomorphie** von Pseudographen. Wie auch bei anderen mathematischen Objekten üblich, ist hier die Grundidee, verschiedene Objekte in gewissen Zusammenhängen als ein Objekt ansehen zu dürfen, wenn sie sich streng mengentheoretisch unterscheiden, von der Struktur her aber identisch sind.

**Isomorphie****Beispiel 1.1-7:**

Die drei in den Diagrammen dargestellten Graphen sind zwar verschieden, jedoch von ihrer Struktur her gleich.

**Definition 1.1-13: Isomorphismus**

$P = (E, K, v)$  und  $P' = (E', K', v')$  seien Pseudographen. Ein Paar von Abbildungen

$$\phi : E \rightarrow E', \psi : K \rightarrow K'$$

heißt ein **Isomorphismus** von  $P$  auf  $P'$ , wenn  $\phi$  und  $\psi$  bijektiv sind und wenn für alle  $k \in K$  und  $x, y \in E$  gilt:

**Isomorphismus**

$$v(k) = \{x, y\} \Leftrightarrow v'(\psi(k)) = \{\phi(x), \phi(y)\}.$$

**isomorph** Existiert ein Isomorphismus von  $P$  auf  $P'$ , so heißen  $P$  und  $P'$  **isomorph** ( in Zeichen:  $P \simeq P'$  ).

Für Graphen lässt sich der Begriff Isomorphismus einfacher fassen, wenn man die Kanten als Eckmenge auffasst:

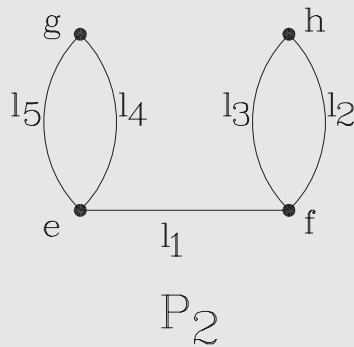
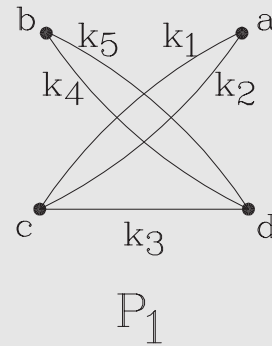
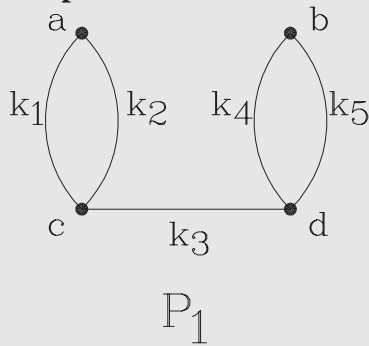
$G$  und  $G'$  seien Graphen. Eine Abbildung

$$\phi : E \rightarrow E'$$

heißt Isomorphismus von  $G$  auf  $G'$ , wenn  $\phi$  bijektiv ist und für alle  $\{x, y\} \in E$  gilt

$$\{x, y\} \in K \Leftrightarrow \{\phi(x), \phi(y)\} \in K'.$$

**Beispiel 1.1-8:**



Man beachte, dass die beiden ersten Diagramme Darstellungen desselben Multigraphen  $P_1$  sind. Ein Isomorphismus von  $P_1$  auf  $P_2$  ist z. B. gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi(a) = g, \phi(b) = h, \phi(c) = e, \phi(d) = f, \psi(k_1) = l_5, & \quad 1.1-1 \\ \psi(k_2) = l_4, \psi(k_3) = l_1, \psi(k_4) = l_3, \psi(k_5) = l_2. & \end{aligned}$$

Bei Beispiel 1.1-7 reicht es, da es sich um Graphen handelt, eine Abbildung zwischen den Eckenmengen anzugeben, um einen Isomorphismus zu beschreiben. So



ist z. B. die Abbildung  $\phi$  mit  $\phi(b) = b, \phi(a) = c, \phi(c) = a$  ein Isomorphismus des im ersten Diagramm dargestellten Graphen auf den zweiten.

Es ist wichtig anzumerken, dass beim Umgang mit Pseudographen die Begriffe "Gleichheit" und "Isomorphie" oft nicht sauber getrennt werden, was jedoch in der Regel nicht zu falschen Schlussfolgerungen führt: hinsichtlich aller mathematischen Eigenschaften (und nur abgesehen von der "Natur" der Elemente) sind zwei isomorphe Pseudographen im Grunde "gleich".

Stillschweigend haben wir den Begriff der Isomorphie auch bereits bei den Beispielen Beispiel 1.1-2 und Beispiel 1.1-3 benutzt, wo Pseudographen durch ihre Diagramme ohne Bezeichnungen für Ecken und Kanten definiert wurden. Wenn man einen Pseudographen durch ein Diagramm einführt, das nicht für alle Ecken und Kanten Namen enthält, so ist damit strenggenommen gemeint, dass von irgendeinem der vielen zueinander isomorphen Pseudographen die Rede ist, die durch das Diagramm beschrieben werden; man kann auch die Auffassung haben, dass durch das Diagramm eine **Isomorphieklasse** von Pseudographen festgelegt wird. Es ist aber trotzdem üblich, in dieser Situation von dem in dem betreffenden Diagramm dargestellten Pseudographen zu sprechen.

**Isomorphieklasse**

Als nächstes werden die grundlegenden Operationen beschrieben, mit denen aus vorgegebenen Pseudographen weitere konstruiert werden können.

### Definition 1.1-14: Teilgraph

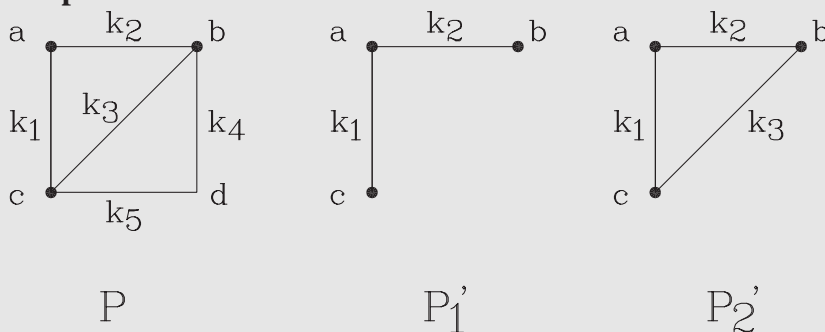
Ein Pseudograph  $P' = (E', K', v')$  heißt ein **Teilgraph** von  $P = (E, K, v)$  (in Zeichen  $P' \subseteq P$ ), wenn  $E' \subseteq E, K' \subseteq K$  und  $v'(k) = v(k)$  für alle  $k \in K'$ . Ist  $P' \neq P$ , so heißt  $P'$  ein **echter Teilgraph** von  $P$  ( $P' \subset P$ ). Gehört jede Kante von  $P$ , die zwei Ecken von  $P'$  verbindet, zu  $P'$ , so heißt  $P'$  **der von  $E'$  induzierte** (oder: **aufgespannte**) **Untergraph** von  $P$ . (Der Kürze wegen wählt man hier nicht die Bezeichnungen "Teilpseudograph" oder "Unterpseudograph".)

**Teilgraph**

**echter Teilgraph**

**induzierter Untergraph**

#### Beispiel 1.1-9:



$P_1'$  ist Teilgraph, jedoch kein Untergraph, weil die Kante  $k_3$  nicht zu  $P_1'$  gehört, aber die zu  $P_1'$  gehörenden Ecken  $b$  und  $c$  verbindet.  $P_2'$  ist der von  $\{a, b, c\}$  induzierte Untergraph.

Es ist leicht einzusehen, dass ein von  $E'$  induzierter Untergraph von  $P$  durch die Angabe von  $E'$  eindeutig festliegt. Demgegenüber ist ein Teilgraph bis auf isolierte Ecken durch seine Kanten festgelegt:

**Definition 1.1-15: Induzierter Teilgraph**

Ist  $P' \subseteq P$ , und enthält  $P'$  keine isolierten Ecken (d. h. für alle  $a \in E'$  gilt  $\gamma(a, P') \neq 0$ ), so kann man  $P'$  als den **von  $K'$  induzierten Teilgraphen** von  $P$  auffassen, welcher durch  $K'$  eindeutig bestimmt ist.

$P'_1$  aus Beispiel 1.1-9 ist durch die Menge  $K' = \{k_1, k_2\}$  induziert.

**Definition 1.1-16: Löschen einer Kante**

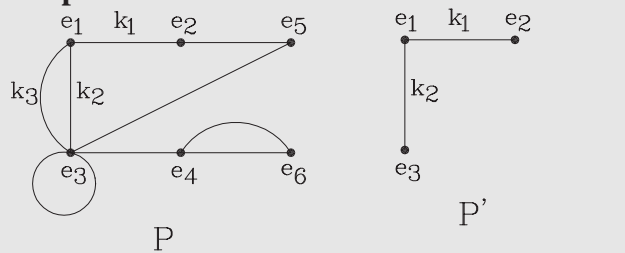
**Löschen einer Kante von  $P$**

Sei  $P = (E, K, v)$  ein Pseudograph. Unter dem **Löschen einer Kante** von  $P$  versteht man (für  $k \in K$ ) die Bildung des Pseudographen  $P \setminus k := (E, \tilde{K}, \tilde{v})$  mit  $\tilde{K} = K \setminus \{k\}$  und  $\tilde{v} = v / \tilde{K}$ . Entsprechend ist das **Löschen eines Teilgraphen**

**Löschen eines Teilgraphen von  $P$**

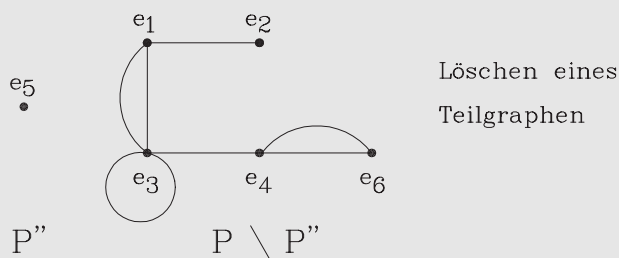
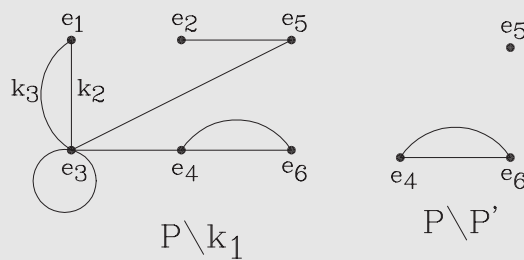
von  $P$  (für  $P' \subseteq P$ ) die Bildung des Pseudographen  $P \setminus P' = (\tilde{E}, \tilde{K}, \tilde{v})$  mit  $\tilde{E} = E \setminus E'$ ,  $\tilde{K} = \{k \in K \mid v(k) \cap E' = \emptyset\}$  und  $\tilde{v} = v / \tilde{K}$ .

**Beispiel 1.1-10:**



Löschen einer Kante

Löschen eines Teilgraphen



Löschen eines Teilgraphen

Besteht, wie im letzten Beispiel, der gelöschte Teilgraph nur aus einer Ecke  $e$ , so schreibt man für das Ergebnis auch kurz  $P \setminus e$  (hier:  $P \setminus e_5$  statt  $P \setminus P''$ ).

**Definition 1.1-17: Durchschnitt der Pseudographen**

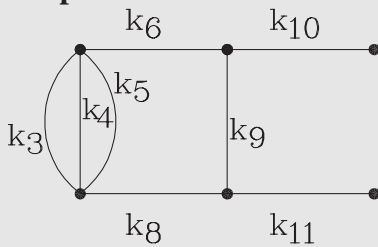
$P_i = (E_i, K_i, v_i), i \in I$ , sei eine Familie von Pseudographen, und für  $k \in K_i \cap K_j (i, j \in I)$  sei stets  $v_i(k) = v_j(k)$ . Unter dem **Durchschnitt der Pseudographen**  $P_i (i \in I)$  versteht man den Pseudographen

$$\bigcap_{i \in I} P_i := \left( \bigcap_{i \in I} E_i, \bigcap_{i \in I} K_i, \bigcap_{i \in I} v_i \right),$$

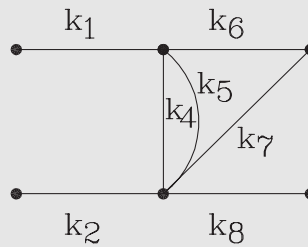
unter ihrer **Vereinigung** den Pseudographen

$$\bigcup_{i \in I} P_i := \left( \bigcup_{i \in I} E_i, \bigcup_{i \in I} K_i, \bigcup_{i \in I} v_i \right).$$

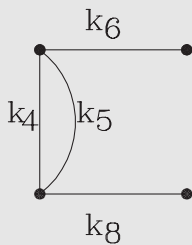
**Beispiel 1.1-11:**



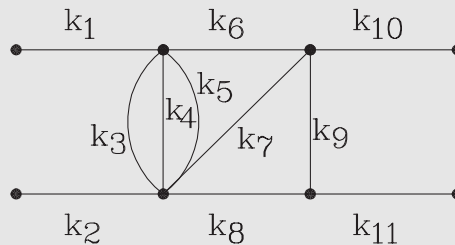
$P_1$



$P_2$



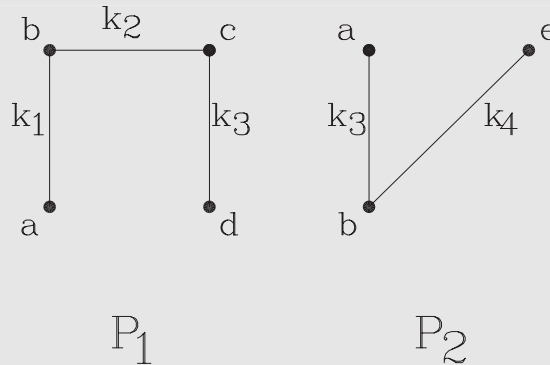
$P_1 \cap P_2$



$P_1 \cup P_2$

**Beispiel 1.1-12:**

Wir illustrieren die Notwendigkeit der Bedingung  $v_i(k) = v_j(k)$  für  $k \in K$  bei der Definition von Durchschnitt und Vereinigung an folgenden Graphen:



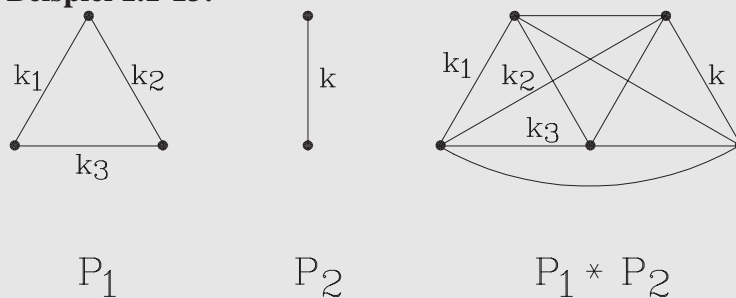
Da die Kante  $k_3$  in  $P_1$  die Ecken  $c$  und  $d$ , in  $P_2$  aber die Ecken  $a$  und  $b$  verbindet, lassen sich  $P_1 \cap P_2$  und  $P_1 \cup P_2$  nicht sinnvoll definieren.

**Definition 1.1-18: Summe**

$P_1$  und  $P_2$  seien zwei disjunkte Pseudographen (d. h.  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  und  $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ ). Dann verstehen wir unter der **Summe**

$$P_1 * P_2$$

den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Pseudographen, der aus  $P_1 \cup P_2$  dadurch entsteht, dass jede Ecke von  $P_1$  mit jeder Ecke von  $P_2$  zusätzlich durch eine (neue) Kante verbunden wird.

**Beispiel 1.1-13:**

In Verallgemeinerung von Definition 1.1-18 wird definiert:

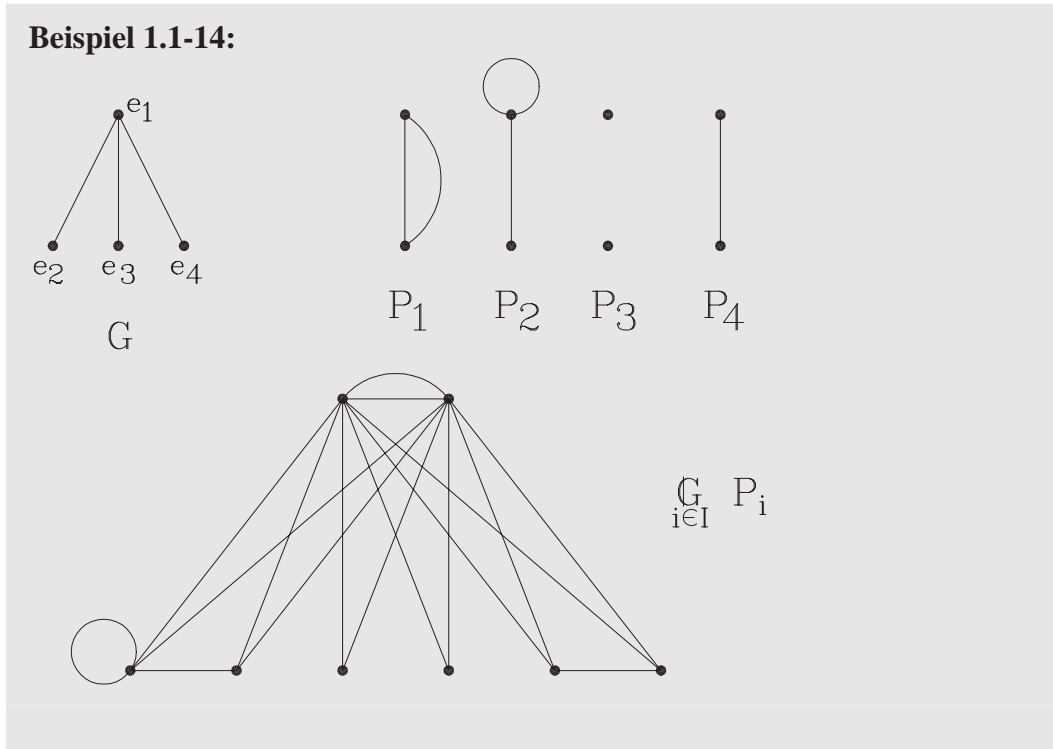
**Definition 1.1-19: Summe der  $P_i$  über dem Graphen**

Ist  $G$  ein Graph mit der Eckenmenge  $E = \{e_i | i \in I\}$ , und ist  $P_i = (E_i, K_i, v_i)$  ( $i \in I$ ) eine disjunkte Familie von Pseudographen, so verstehen wir unter der **Summe der  $P_i$  über dem Graphen  $G$** ,  $G, G_{i \in I} P_i$ , den (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten) Pseudographen, der aus  $\bigcup_{i \in I} P_i$  dadurch hervorgeht, dass alle  $a \in E_i$  und  $b \in E_j$  für  $i \neq j$  genau dann zusätzlich durch eine neue Kante verbunden werden, wenn die Ecken  $e_i$  und  $e_j$  in  $G$  benachbart sind.

Setzt man in Definition 1.1-19 speziell  $I = \{1, 2\}$  und wählt für  $G$  den 2-eckigen Graphen mit einer Kante, so ergibt sich Definition 1.1-18.

In  $G_{i \in I} P_i$  heißt  $G$  der **äußere Graph**,  $P_i$  sind die **inneren Pseudographen**. Ist  $G$  ein Simplex, und sind alle  $P_i$  kantenlos, so heißt  $G_{i \in I} P_i$  **simplexartig**.

**äußerer Graph,  
innerer Pseudograph  
simplexartig**



**Selbsttestaufgabe 1.1-1:**

Erläutern Sie den Unterschied zwischen den Begriffen Teilgraph und Untergraph und illustrieren Sie dies anhand eines Beispiels.

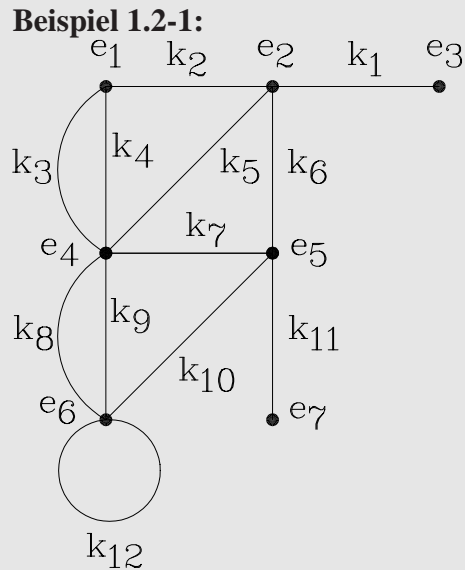
## 1.2 Wege, Kreise, Zusammenhang

**Definition 1.2-1: Kantenfolge**

$P = (E, K, v) =$  sei ein Pseudograph.

Eine Folge  $(e_0, k_1, e_1, k_2, e_2, \dots, e_{i-1}, k_i, e_i, \dots, k_n, e_n)$  mit  $e_i \in E$  und  $k_j \in K$  heißt eine **Kantenfolge**, wenn für alle  $i (1 \leq i \leq n)$  gilt  $v(k_i) = \{e_{i-1}, e_i\}$ . Die Ecke  $e_0$  heißt die **Anfangsecke**, die Ecke  $e_n$  die **Endecke** der Folge.

**Kantenfolge  
Anfangsecke, Endecke  
einer Kantenfolge**



Kantenfolgen sind z. B.:

$$F_1 = (e_3, k_1, e_2, k_6, e_5, k_7, e_4),$$

$$F_2 = (e_4, k_8, e_6, k_{12}, e_6, k_{10}, e_5, k_7, e_4),$$

$$F_3 = (e_1, k_3, e_4, k_9, e_6, k_9, e_4, k_5, e_2).$$

Eine Kantenfolge wird häufig nur durch die Folge ihrer Kanten (ohne explizite Nennung der Ecken) dargestellt. Für das obige Beispiel ergibt sich  $F'_1 = (k_1, k_6, k_7)$ ,  $F'_2 = (k_8, k_{12}, k_{10}, k_7)$ ,  $F'_3 = (k_3, k_9, k_9, k_5)$ ; in allen diesen drei Fällen ist die ursprüngliche Kantenfolge aus der abgekürzten Folge rekonstruierbar. Die Kantenfolge  $F_4 = (e_4, k_8, e_6, k_8, e_4)$  könnte aber z. B. nicht aus  $F'_4 = (k_8, k_8)$  zurückgewonnen werden.

### Definition 1.2-2: Kantenzug

geschlossene, offene  
Kantenfolge  
Länge einer  
Kantenfolge  
Kantenzug  
Weg  
Kreis

Eine Kantenfolge ist **geschlossen**, falls ihre Anfangsecke gleich ihrer Endecke ist, andernfalls ist sie **offen**. Die Anzahl der Kanten in einer Kantenfolge  $F$  wird als ihre **Länge**  $|F|$  bezeichnet. Ein **Kantenzug** ist eine Kantenfolge, die keine Kante zweimal enthält. Ein **Weg** ist ein Kantenzug, der auch keine Ecke zweimal enthält. Ein **Kreis** ist ein geschlossener Kantenzug, der (von Anfangs- und Endecke abgesehen) keine Ecke zweimal enthält.

### Beispiel 1.2-2:

$F_1$  (aus Beispiel 1.2-1) ist ein Weg mit  $|F_1| = 3$ .

$F_2$  (mit  $|F_2| = 4$ ) ist ein geschlossener Kantenzug, jedoch kein Kreis, da außer  $e_4$  auch  $e_6$  zweimal enthalten ist.

$F_3$  (mit  $|F_3| = 4$ ) ist eine offene Kantenfolge, aber kein Kantenzug.

Ist in dem Pseudographen  $P$  ein Weg oder ein Kreis  $F$  gegeben, so bestimmt dieser eindeutig einen Teilgraphen von  $P$ , der genau die in  $F$  vorkommenden Ecken und Kanten enthält. Beim Übergang zu diesem Teilgraphen geht allerdings die "Rich-

zung" verloren, im Falle eines Kreises auch die Festlegung der Anfangs- bzw. Endecke.

### Beispiel 1.2-3:

Es sei wieder der Pseudograph aus Beispiel 1.2-1 zugrundegelegt.

$F_5 = (e_1, k_3, e_4, k_5, e_2, k_2, e_1)$  und

$F_6 = (e_2, k_5, e_4, k_3, e_1, k_2, e_2)$  bestimmen denselben Teilgraphen.

Im folgenden werden, trotz der angesprochenen Probleme, von Wegen bzw. Kreisen herkommende Teilgraphen auch als "Wege" bzw. "Kreise" bezeichnet. Mit dieser Vereinbarung kann dann auch von der Vereinigung oder dem Durchschnitt von Wegen bzw. Kreisen gesprochen werden.

In einem Graphen kann eine Kantenfolge auch durch die Folge der beteiligten Ecken angegeben werden, denn dadurch ist die Kantenfolge bereits eindeutig bestimmt.

Wir kommen nun zu dem grundlegenden Begriff des Zusammenhangs eines Pseudographen. Kurz gesagt ist ein Pseudograph **Zusammenhang** zusammenhängend, wenn er "an einem Stück" ist; der in Beispiel 1.1-6 vorkommende Graph ist z. B. nicht zusammenhängend.

Die präzise Begriffsdefinition lautet:

### Definition 1.2-3: Zusammenhang

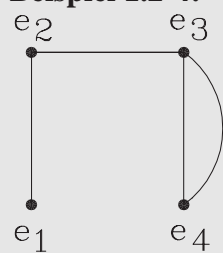
Zwei Ecken  $a, b$  eines Pseudographen  $P$  heißen **verbindbar** in  $P$ , wenn  $a = b$  ist oder es einen Weg in  $P$  von  $a$  nach  $b$  gibt. Sind je zwei Ecken von  $P$  verbindbar, so heißt  $P$  **zusammenhängend**.

**Zusammenhang**

**verbindbare Ecken**

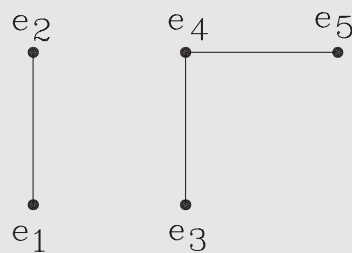
**zusammenhängend**

### Beispiel 1.2-4:



$P_1$

$P_1$  ist zusammenhängend,  $P_2$  nicht.



$P_2$

Ein Pseudograph  $P = (E, K, v)$  sei gegeben, die Verbindbarkeit von  $a, b \in E$  werde durch  $a \sim b$  gekennzeichnet.

**Satz 1.2-1:** Die Verbindbarkeit  $\sim$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $E$ .

**Beweis:** Die Reflexivität ist aufgrund der Definition sofort klar.

Symmetrie: Ist  $a \sim b$ , so gibt es in  $P$  einen Weg von  $a$  nach  $b$ . Durchlaufen dieser Kantenfolge in umgekehrter Richtung ergibt einen Weg von  $b$  nach  $a$ , folglich ist  $b \sim a$ .

Transitivität: Ist  $a \sim b$  und  $b \sim c$ , so hat man jeweils einen Weg von  $a$  nach  $b$  und von  $b$  nach  $c$ . Die Aneinanderreihung dieser beiden Wege ergibt eine Kantenfolge von  $a$  nach  $c$ . Als Teilfolge lässt sich dann ein Weg von  $a$  nach  $c$  finden, somit ist auch  $a \sim c$ .

#### Definition 1.2-4: Zusammenhangskomponenten

Die  $\sim$ -Äquivalenzklassen bilden eine disjunkte Zerlegung der Eckenmenge  $E$ . Die von den Äquivalenzklassen aufgespannten Untergraphen von  $P$  heißen die (**Zusammenhangs-**) **Komponenten** von  $P$ .

Zusammenhangs-  
komponenten

Jede Zusammenhangskomponente von  $P$  ist ein maximaler zusammenhängender Untergraph von  $P$ .  $P$  ist die disjunkte Vereinigung aller Komponenten.

$P$  selbst ist zusammenhängend, wenn nur eine Komponente existiert.

#### Beispiel 1.2-5:

$P_2$  aus Beispiel 1.2-4 besteht aus zwei Komponenten, die von den  $\sim$ -Äquivalenzklassen  $\{e_1, e_2\}$  und  $\{e_3, e_4, e_5\}$  aufgespannt werden.

#### Beispiel 1.2-6:

Nimmt man alle Hauptanschlüsse im öffentlichen Telefonnetz der Deutschen Bundespost sowie die Vermittlungsstellen als Ecken und die dazwischen liegenden Leitungen als Kanten, so ergibt sich ein Multigraph. Die Aussage, dass dieser Multigraph zusammenhängend ist, bedeutet, dass von jedem Punkt zu jedem anderen telefoniert werden kann.

In vielen Anwendungen hat man es mit Pseudographen zu tun, von denen man von vornherein weiß, dass sie bestimmte spezielle Eigenschaften haben. Betrachtet man z. B. bei dem das Telefonnetz darstellenden Multigraphen nur eine Ortsvermittlungsstelle mit den daran angeschlossenen Teilnehmern, so enthält dieser Teilgraph keinen Kreis.

Besonders häufig tauchen Klassen von Pseudographen auf, die durch das Nicht-Enthalten bestimmter Teilgraphen charakterisiert sind. Im folgenden werden einige wichtige dieser Klassen eingeführt.

#### Definition 1.2-5: Kreisloser Pseudograph

kreisloser  
Pseudograph  
Wald  
Baum  
 $n$ -Baum

Ein Pseudograph heißt **kreislos**, wenn er keinen Kreis enthält. Ein kreisloser Pseudograph heißt auch **Wald**.

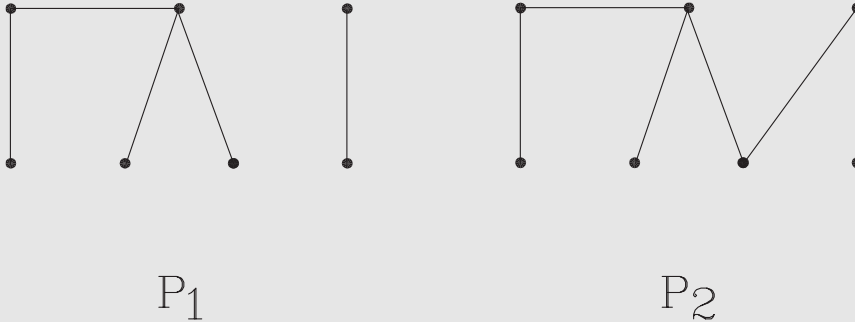
Ein zusammenhängender Wald ist ein **Baum**.

Ein Wald, der aus  $n$  Komponenten besteht, heißt auch ein  **$n$ -Baum**.



Man beachte: ein kreisloser Pseudograph ist stets ein Graph.

**Beispiel 1.2-7:**



$P_1$  ist ein Wald bzw. ein 2-Baum,  $P_2$  ist ein Baum. Der Pseudograph aus Beispiel 1.2-1 enthält Kreise und ist somit kein Wald.

Auf einen Baum bzw. Wald trifft man oft dann, wenn man es mit einer Grundgesamtheit zu tun hat, die "baumartig" hierarchisch geordnet ist. Man denke etwa an die sogenannten Familienstammbäume.

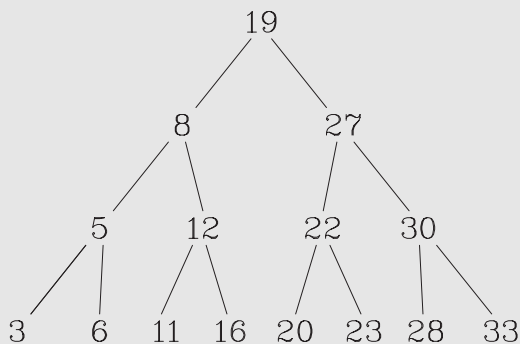
Auch beim sogenannten **binären Suchen** ist eine Baumstruktur (binärer Suchbaum) im Spiel. Soll z. B. eine weitere Zahl in eine bereits geordnete Liste von Zahlen (etwa Messwerten) an der richtigen Stelle eingeordnet werden, so empfiehlt es sich als Strategie, die neue Zahl zunächst mit der Zahl zu vergleichen, die genau in der Mitte der bisherigen Liste steht, um dann zu wissen, ob man "links" oder "rechts" davon weitersuchen muss; mit der übriggebliebenen Hälfte der Liste wird dann entsprechend verfahren usw. Diese Vorgehensweise entspricht dem Durchlaufen eines Weges in einem Baum, dessen Ecken die Mittelpunkte der Intervalle repräsentieren.

**binäres Suchen**

**Beispiel 1.2-8:**

Zu der geordneten Liste

(3, 5, 6, 8, 11, 12, 16, 19, 20, 22, 23, 27, 28, 30, 33) gehört der im folgenden Diagramm dargestellte Suchbaum:



Die Zahl 19 ist die mittlere aller gegebenen Zahlen, 8 ist die Mitte des "links" von 19, 27 die Mitte des "rechts" von 19 liegenden Intervalls etc. Eine neu einzu-

ordnende Zahl muss nun nur mit 4 Zahlen verglichen werden, um an die richtige Stelle eingeordnet werden zu können; z. B. wird 24 mit 19, 27, 22 und 23 verglichen.

Von Interesse ist auch das Problem, innerhalb eines nicht kreislosen Pseudographen einen möglichst großen Baum als Teilgraphen aufzuspüren.

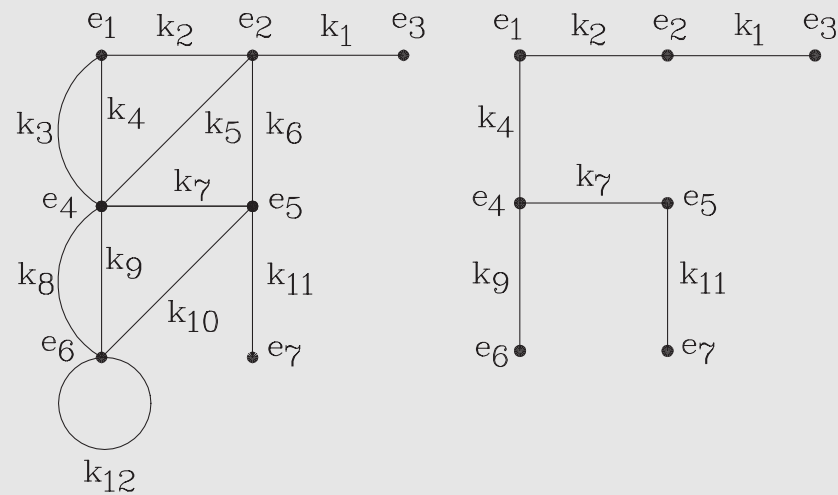
**Definition 1.2-6: Gerüst**

*P* sei ein Pseudograph. Ein Baum *B*, der Teilgraph von *P* ist und jede Ecke von *P* enthält, heißt ein Gerüst (oder spannender Baum) von *P*.

**Gerüst  
spannender Baum**

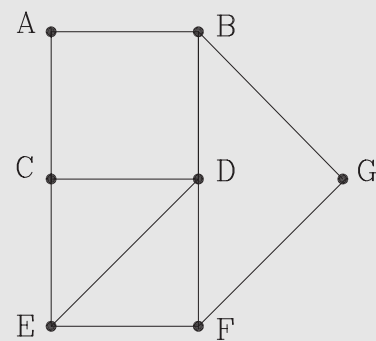
**Beispiel 1.2-9:**

Das Diagramm stellt den Pseudographen aus Beispiel 1.2-1 sowie ein Gerüst dar.

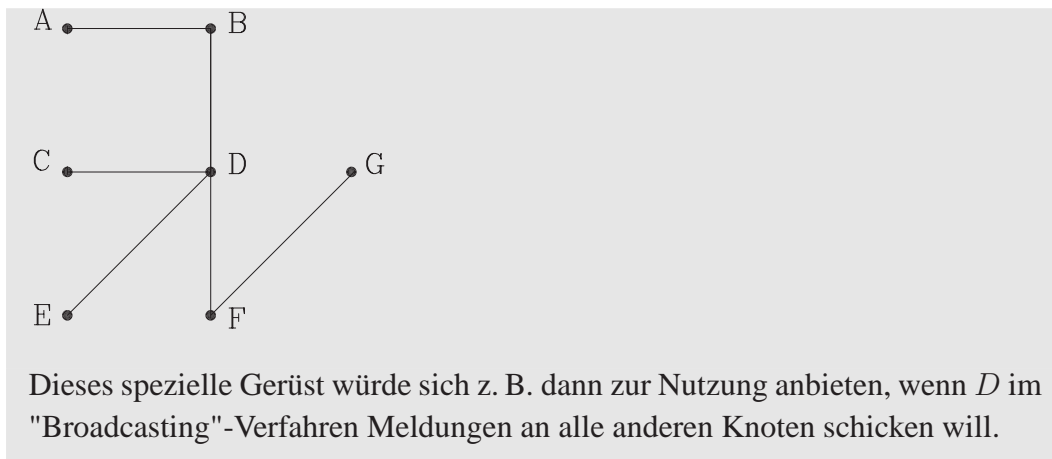


**Beispiel 1.2-10:**

Ein Datennetz mit Netzknoten  $A, B, \dots, G$  habe die im folgendem Diagramm gezeigte Graphenstruktur:



Soll nur sichergestellt werden, dass jeder Knoten mit jedem anderen kommunizieren kann (eventuell über Zwischenknoten), so müssen lediglich die Kanten eines Gerüsts genutzt werden. Das folgende Bild zeigt ein Gerüst:



Als nächstes werden zwei wichtige Eigenschaften von Bäumen bzw. Gerüsten nachgewiesen, die von der Anschauung her unmittelbar einleuchten: unter allen zusammenhängenden Graphen mit einer festen Eckenanzahl haben Bäume die wenigsten Kanten, und jeder zusammenhängende Pseudograph enthält ein Gerüst. Zunächst sind einige Vorüberlegungen nötig.

**Hilfssatz 1.2-1:** *Sei  $F$  ein Kreis in dem zusammenhängenden Pseudographen  $P$ ,  $k$  eine in  $F$  vorkommende Kante. Dann ist auch der Pseudograph  $P' = P \setminus k$  zusammenhängend.*

**Beweis:** Es seien  $a, b$  zwei beliebige Ecken von  $P'$  bzw.  $P$ . Es ist zu zeigen, dass  $a$  und  $b$  in  $P'$  verbindbar sind. Da  $P$  zusammenhängend ist, gibt es in  $P$  einen Weg von  $a$  nach  $b$ . Benutzt dieser Weg die Kante  $k$  nicht, so ist dies auch in  $P'$  ein Weg von  $a$  nach  $b$ . Enthält dieser Weg in  $P$  von  $a$  nach  $b$  jedoch die Kante  $k$ , so kann statt der Kante  $k$  der ganz in  $P'$  enthaltene Rest des Kreises  $F$  (außer  $k$ ) benutzt werden, um nun eine Kantenfolge in  $P'$  von  $a$  nach  $b$  zu erhalten, die einen Weg als Teilfolge enthalten muss.

**Satz 1.2-2:** *Jeder zusammenhängende Pseudograph besitzt ein Gerüst.*

**Beweis:** Der Beweis wird durch vollständige Induktion über die Anzahl der Kanten  $|K|$  von Pseudographen  $P = (E, K, v)$  geführt. Im Falle  $|K| = 1$  ist der Satz offenbar richtig.

Nun wird vorausgesetzt, dass für alle Pseudographen mit  $n$  ( $n \geq 1$ ) vielen Kanten die Behauptung bereits richtig sei, ferner sei ein zusammenhängender Pseudograph  $P$  mit  $|K| = n + 1$  gegeben. Ist  $P$  ein Baum, so ist nichts zu zeigen,  $P$  ist "sein eigenes Gerüst".

Enthält  $P$  aber einen Kreis  $F$ , so gilt für eine beliebige Kante  $k$  aus diesem Kreis, dass  $P' = P \setminus k$  ein zusammenhängender Pseudograph (nach Hilfssatz 1.2-1) mit  $n$  vielen Kanten ist, der nach Induktionsvoraussetzung ein Gerüst besitzt. Dieses Gerüst ist auch ein Gerüst von  $P$ .

**Definition 1.2-7: Endkante**

- Endecke** Eine Ecke  $a$  eines Pseudographen  $P$  mit  $\gamma(a, P) = 1$  heißt eine **Endecke** von  $P$ .
- Endkante** Eine Kante, die mit einer Endecke inzidiert, heißt **Endkante**.
- Abstand** Für je zwei Ecken  $b, c$  von  $P$  definiert man den **Abstand**  $|b, c|_P$  zwischen  $b$  und  $c$  in  $P$  wie folgt:

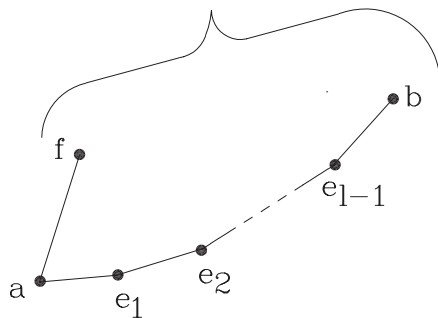
$$|b, c|_P = \begin{cases} 0, & \text{wenn } b = c \text{ ist;} \\ \infty, & \text{wenn } b \text{ und } c \text{ in } P \text{ nicht verbindbar sind;} \\ l, & \text{wenn } l \text{ die kürzestmögliche Länge eines} \\ & \text{Weges in } P \text{ von } b \text{ nach } c \text{ ist.} \end{cases} \quad 1.2-1$$

**Hilfssatz 1.2-2:**  $P = (E, K, v)$  sei ein Baum. Dann gilt:

- i.  $P$  enthält mindestens zwei Endecken.
- ii.  $|K| = |E| - 1$

**Beweis:** i.  $a, b \in E$  seien derart gewählt, dass  $|a, b|_P$  für  $P$  maximal ist, d. h. es gibt keine zwei Ecken, die einen größeren Abstand voneinander haben. Wir zeigen, dass  $a$  (und aus Symmetriegründen auch  $b$ ) eine Endecke ist.  $(a, k_1, e_1, k_2, e_2, \dots, k_l, b)$  sei ein kürzester Weg in  $P$  von  $a$  nach  $b$ . Hätte  $a$  außer  $e_1$  eine weitere Nachbarecke  $f$  (s. das Diagramm), so müsste es wegen  $|f, b|_P \leq |a, b|_P$

$$|f, b|_P \leq |a, b|_P$$



einen kürzesten Weg von  $f$  nach  $b$  geben, der nicht durch die Ecke  $a$  verläuft. Dann gäbe es jedoch einen Kreis in  $P$ , im Widerspruch zur Voraussetzung.

ii. Dies folgt nun leicht mit Induktion: Entfernen einer Endecke und der zugehörigen Kante führt zu einem Teilbaum  $P' = (E', K', v')$  mit  $|E'| = |E| - 1, |K'| = |K| - 1$  und  $|K'| = |E'| - 1$  (nach Induktionsvoraussetzung).

Damit kann nun folgendes gezeigt werden.

**Satz 1.2-3:**  $P = (E, K, v)$  sei ein zusammenhängender Pseudograph. Dann gilt  $|K| \geq |E| - 1$ , und es ist  $|K| = |E| - 1$  genau dann, wenn  $P$  ein Baum ist.

**Beweis:** Die allgemeine Ungleichung  $|K| \geq |E| - 1$  folgt sofort aus Satz 1.2-2 und Hilfssatz 1.2-2 ii), ferner auch die Gleichung  $|K| = |E| - 1$  für einen Baum. Sei nun umgekehrt  $|K| = |E| - 1$ .

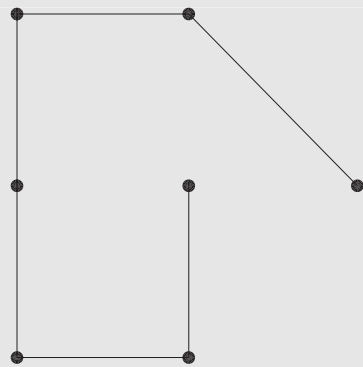
Wir nehmen an,  $P$  sei kein Baum. Nach Hilfssatz 1.2-1 kann aus  $P$  eine Kante  $k$  entfernt werden, so dass  $P' = P \setminus k$  zusammenhängend ist. In dem zusammenhängenden Pseudographen  $P'$  mit Eckenmenge  $E$  und Kantenmenge  $K' = K \setminus \{k\}$  gilt also  $|K'| < |E| - 1$ .

Dies ist nun ein Widerspruch, denn nach Satz 1.2-2 müsste es in  $P'$  ein Gerüst geben, welches nach Hilfssatz 1.2-2  $|E| - 1$  viele Kanten hat, die sämtlich in der Menge  $K'$  enthalten sind.

**Folgerung 1.2-1:** Alle Gerüste eines zusammenhängenden Pseudographen  $P = (E, K, V)$  haben dieselbe Anzahl von Kanten (nämlich  $|E| - 1$ ).

### Beispiel 1.2-11:

Im folgenden Diagramm ist ein weiteres Gerüst des Graphen aus Beispiel 1.2-10 dargestellt. Beide Gerüste haben 6 Kanten.

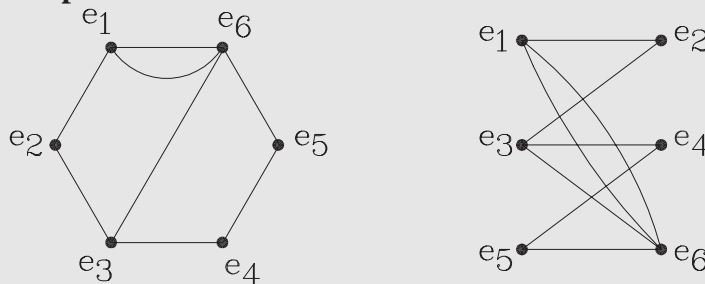


Als nächstes wird eine weitere interessante Klasse von Pseudographen betrachtet, die sich (allerdings erst auf den zweiten Blick) durch das Nicht-Enthalten gewisser Kreise charakterisieren lassen.

### Definition 1.2-8: Bipartiter Pseudograph

Ein Pseudograph  $P = (E, K, v)$  heißt **bipartit** (oder **paar**), wenn die Eckenmenge  $E$  die disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer Teilmengen  $E'$  und  $E''$  ist derart, dass  $E'$  und  $E''$  kantenlose Untergraphen von  $P$  aufspannen, wenn also alle Kanten von  $P$  einen Endpunkt in  $E'$  und einen in  $E''$  haben.

**bipartiter (paarer)  
Pseudograph**

**Beispiel 1.2-12:**

Beide Diagramme stellen denselben Pseudographen dar. Im bipartiten Fall ist es üblich, wie hier im rechten Diagramm, die Mengen  $E'$  und  $E''$  (hier  $\{e_1, e_3, e_5\}$  und  $\{e_2, e_4, e_6\}$ ) auch optisch voneinander zu trennen.

**Satz 1.2-4:** Ein Pseudograph  $P = (E, K, v)$  ist genau dann bipartit, wenn  $P$  keinen Kreis ungerader Länge enthält.

**Beweis:** Ist  $P$  bipartit, so kann  $P$  sicher nur Kreise gerader Länge enthalten (wie im obigen Beispiel), denn für einen Kreis mit einer ungeraden Anzahl von Ecken ist es nicht möglich, dass diese Ecken abwechselnd zu zwei disjunkten Mengen  $E'$  und  $E''$  gehören.

Umgekehrt enthalte  $P$  keinen Kreis ungerader Länge. Der Nachweis, dass  $P$  bipartit ist, wird durch Induktion über  $|K|$  (Anzahl der Kanten) geführt, wobei für den Induktionsanfang  $|K| = 0$  nichts zu zeigen bleibt. Als Induktionsvoraussetzung wird nun angenommen, dass die Behauptung für alle Pseudographen mit  $n$  vielen Kanten richtig ist. Es sei  $P$  ein Pseudograph mit  $n+1$  vielen Kanten, der keine ungeraden Kreise enthält, ferner sei  $k \in K$  eine beliebige Kante und  $\tilde{P} := P \setminus k$ .  $\tilde{P}$  enthält keinen ungeraden Kreis, denn durch Löschen einer Kante werden keine neuen Kreise erzeugt. Da  $\tilde{P}$   $n$  viele Kanten hat, ist  $\tilde{P}$  nach Induktionsvoraussetzung bipartit, d. h. man hat eine Einteilung der Eckenmenge  $E$  von  $\tilde{P}$  (die auch die Eckenmenge von  $P$  ist) in  $E'$  und  $E''$ , so dass jede Kante von  $K - \{k\}$  eine Ecke von  $E'$  mit einer aus  $E''$  verbindet. Gelingt es nun zu zeigen, dass von den Endpunkten  $a$  und  $b$  von  $k$  einer zu  $E'$  und der andere zu  $E''$  gehört, so ist auch  $P$  als bipartit nachgewiesen.

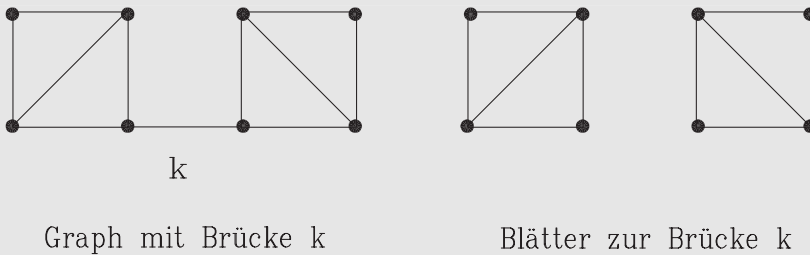
Es sind zwei Fälle zu betrachten.

Sind  $a$  und  $b$  in  $\tilde{P}$  nicht verbindbar (d. h. sie gehören zu verschiedenen Komponenten von  $\tilde{P}$ ), so kann über die Zerlegung  $E'$  und  $E''$  o.B.d.A. vorausgesetzt werden  $a \in E'$  und  $b \in E''$ . Sind  $a$  und  $b$  in  $\tilde{P}$  verbindbar, so muss jeder Weg von  $a$  nach  $b$  in  $\tilde{P}$  eine ungerade Anzahl von Kanten enthalten, denn sonst hätte man (durch Hinzunahme von  $k$ ) einen ungeraden Kreis in  $P$ . Anfangs- und Endknoten eines ungeraden Weges in  $\tilde{P}$  gehören offenbar zu verschiedenen unter den Mengen  $E'$  und  $E''$ . Damit ist gezeigt, dass  $P$  bipartit ist.

Zum Schluss dieses Abschnitts soll ein weiterer Begriff eingeführt werden, der anschaulich leicht zu fassen ist.

**Definition 1.2-9: Brücke**

Eine Kante  $k$  des Pseudographen  $P$  heißt **Brücke** (oder **Isthmus**) von  $P$ , wenn  $k$  keine Endkante von  $P$  ist und wenn die  $k$  enthaltende Komponente von  $P$  nach Wegnahme von  $k$  (d. h. in  $P \setminus k$ ) in zwei Komponenten zerfällt. Diese beiden Komponenten von  $P \setminus k$  heißen die **Blätter** zur Brücke  $k$ .

**Brücke (Isthmus)****Blatt****Beispiel:**

Ohne Beweis merken wir an, dass  $k$  stets genau dann eine Brücke von  $P$  ist, wenn  $P$  keinen Kreis durch  $k$  enthält und  $k$  keine Endkante von  $P$  ist. Auch der Beweis der folgenden Charakterisierung von Bäumen sei dem Leser überlassen.

**Satz 1.2-5:** Für einen Multigraphen  $P$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- i.  $P$  ist ein Baum.  $P$  ist zusammenhängend, und jede Kante von  $P$  ist Endkante oder Brücke.
- ii. Je zwei Ecken  $a$  und  $b$  sind durch genau einen Weg in  $P$  miteinander verbunden.

**Selbsttestaufgabe 1.2-1:**

- i. Erläutern Sie die Begriffe Kreis und Baum.
- ii. Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen Gerüste des vollständigen Graphen  $K_4$  mit 4 Ecken.

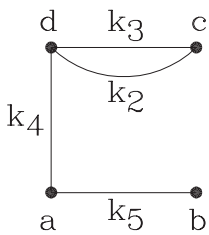
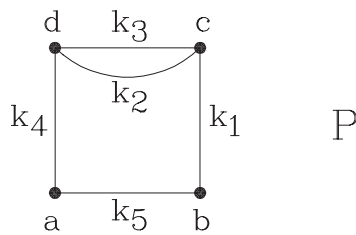




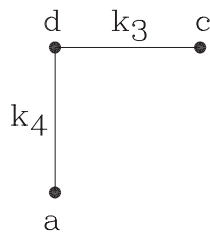
## Lösungen zu Selbsttestaufgaben der Kurseinheit

### Lösung zu Selbsttestaufgabe 1.1-1:

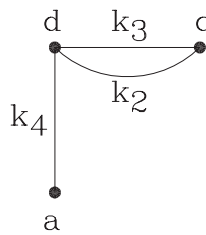
Bei einem Teilgraphen eines Pseudographen  $P$  ist nur verlangt, dass er mit jeder Kante von  $P$  auch die mit ihr in  $P$  inzidenten Ecken enthält. Ein Untergraph muss umgekehrt auch mit zwei zu ihm gehörenden Ecken von  $P$  alle Kanten zwischen diesen beiden Ecken enthalten. Im folgenden Beispiel ist von den Teilgraphen  $P_1, P_2, P_3$  nur  $P_3$  ein Untergraph von  $P$ : bei  $P_1$  fehlt  $k_1$ , bei  $P_2$  fehlt  $k_2$ .



$P_1$



$P_2$

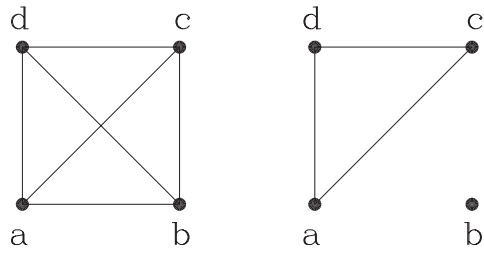


$P_3$

### Lösung zu Selbsttestaufgabe 1.2-1:

i. Ein Kreis ist definiert als geschlossener Kantenzug, der (von Anfangs- und Endecke abgesehen) keine Ecke zweimal enthält. Sind Durchlaufrichtung und Festlegung von Anfangs- bzw. Endecke nicht von Interesse, so kann ein Kreis in einem Pseudographen auch als Teilgraph mit bestimmten Eigenschaften aufgefasst werden; z. B. kann man einen Kreis dadurch charakterisieren, dass er ein zusammenhängender Teilgraph ist, in dem jede Ecke den Grad 2 hat. Ein Baum ist ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält.

ii. Jedes Gerüst von  $K_4$  hat drei Kanten (und enthält alle vier Ecken). Es gibt 20 Möglichkeiten, von den sechs Kanten von  $K_4$  drei auszuwählen. Nur vier dieser Möglichkeiten führen zu Teilgraphen, die nicht zusammenhängend sind - eine ist unten im zweiten Diagramm dargestellt. Keine der anderen Möglichkeiten enthält einen Kreis. Also hat  $K_4$  16 Gerüste.

 $K_4$

# A Kurze Übersicht der verwendeten Begriffe und Symbole aus der Mengenlehre

Eine **Menge**  $M$  kann durch eine Eigenschaft oder - falls sie nur endlich viele Elemente hat - durch die Aufzählung ihrer Elemente beschrieben werden: z. B. ist  $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  identisch mit  $M = \{x | x \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl, } x < 10\}$ .

**Menge**

$x \in M$	steht für "x ist <b>Element</b> der Menge $M$ ".
$M \subseteq N$	steht für " $M$ ist <b>Teilmenge</b> von $N$ ", d. h. für jedes $x$ mit $x \in M$ gilt auch $x \in N$ .
$M \subset N$	bedeutet " $M$ ist <b>echte Teilmenge</b> von $N$ ", also $M \subseteq N$ und $M \neq N$ .

**Element**

**Teilmenge**

**echte Teilmenge**

Die **leere Menge**, d. h. die Menge ohne Elemente, wird mit dem Symbol  $\emptyset$  bezeichnet. Für Mengen  $M$  und  $N$  wird gesetzt

**leere Menge**

$M \cap N = \{x   x \in M \text{ und } x \in N\}$
$M \cup N = \{x   x \in M \text{ oder } x \in N\}$
$M \cap N$ heißt <b>Durchschnitt</b> , $M \cup N$ <b>Vereinigung</b> von $M$ und $N$ .

**Durchschnitt**  
**Vereinigung**

Ist  $M \cap N = \emptyset$ , so heißen  $M$  und  $N$  **disjunkt** **disjunkte Mengen**,  $M \cup N$  die **disjunkte Vereinigung** von  $M$  und  $N$ .

**disjunkte Mengen**

**disjunkte Vereinigung**

Allgemein ist für eine beliebige nicht-leere Indexmenge  $I$ , falls für jedes  $i \in I$  eine Menge  $M_i$  gegeben ist,

$$\bigcap_{i \in I} M_i = \{x | \text{für alle } i \in I \text{ ist } x \in M_i\}$$

und

$$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x | \text{es gibt ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\}.$$

Für Mengen  $M$  und  $N$  ist die **Mengendifferenz** von  $M$  und  $N$

**Mengendifferenz**

$$M \setminus N = \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}.$$

Ist  $N \subseteq M$ , so heißt  $M \setminus N$  auch das **Komplement** von  $N$  in  $M$  und wird mit  $\overline{N}_M$  oder, falls die übergreifende Menge nicht benannt werden muß, einfach mit  $\overline{N}$  bezeichnet.  $P(M)$ , die **Potenzmenge** von  $M$ , ist die Menge aller Teilmengen von  $M$ .

**Potenzmenge**

Ist  $n$  eine natürliche Zahl, und sind  $M_1, M_2, \dots, M_n$  Mengen, dann heißt die Menge

$$X_{i=1}^n M_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \text{für alle } 1 \leq i \leq n \text{ ist } x_i \in M_i\}$$

das **n-faches kartesische Produkt** der  $M_i$  für  $i = 1$  bis  $n$ .

Für  $n = 1$  wird unter  $X_{i=1}^n M_i$  einfach die Menge  $M_1$  verstanden.

Für  $n = 2$  schreibt man statt  $X_{i=1}^n M_i$  einfacher  $M_1 \times M_2$ .

Sind alle  $M_i$  gleich einer Menge  $M$ , so wird  $X_{i=1}^n M_i$  mit  $M^n$  bezeichnet.

Die Elemente von  $X_{i=1}^n M_i$  heißen (**geordnetes n-Tupel**, im Falle  $n = 3$  auch

**Tripel**

**Folge** Ein beliebiges Element von  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M^i$  wird auch als (endliche) **Folge** von Elementen aus  $M$  bezeichnet.

**Relation** Sind  $M$  und  $N$  Mengen, so wird eine Teilmenge  $R \subseteq M \times N$  auch eine **Relation** zwischen  $M$  und  $N$  genannt.

**eindeutige Relation** **Funktion**  $R$  ist eine **eindeutige Relation** oder **Funktion**, wenn für  $m \in M$  und  $n, n' \in N$  aus  $(m, n) \in R$  und  $(m, n') \in R$  stets  $n = n'$  folgt.

**Abbildung** Gilt für eine eindeutige Relation  $R \subseteq M \times N$ , daß zu jedem  $m \in M$  ein (wegen Eindeutigkeit dann genau ein)  $n \in N$  mit  $(m, n) \in R$  existiert, so heißt  $R$  **Abbildung** von  $M$  in  $N$  (oder: von  $M$  nach  $N$ ).

Für Abbildungen werden meist kleine lateinische oder aber griechische Buchstaben als Namen verwendet, z. B.  $f$  (statt  $R$ ). Auch schreibt man statt  $f \subseteq M \times N$  üblicherweise  $f : M \rightarrow N$  oder  $M \xrightarrow{f} N$ , um herauszuheben, daß durch  $f$  jedem  $m \in M$  (genau) ein  $n \in N$  zugeordnet wird, dieses Element von  $N$  wird auch mit  $f(m)$  bezeichnet. Ist  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung und  $\tilde{M} \subseteq M$  eine Teilmenge von  $M$ , so wird die **Einschränkung** von  $f$  auf  $\tilde{M}$  mit  $f/\tilde{M}$  bezeichnet, d. h. man hat die Abbildung  $f/\tilde{M} : \tilde{M} \rightarrow N$ .

**injektiv** Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt **injektiv**, wenn aus  $m_1 \neq m_2$  in  $M$  stets  $f(m_1) \neq f(m_2)$  in  $N$  folgt.  $f$  ist **surjektiv**, falls es zu jedem  $n \in N$  (mindestens) ein  $m \in M$  gibt mit  $f(m) = n$ . Schließlich heißt  $f$ , wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

Für eine Relation  $R \subseteq M \times M$  auf einer Menge  $M$  schreibt man statt  $(x, y) \in R$  auch  $xRy$ .

Man definiert:

**reflexiv** • ist **reflexiv** auf  $M$ , wenn für alle  $x \in M$  gilt  $xRx$ .

**symmetrisch** •  $R$  ist **symmetrisch** auf  $M$ , wenn aus  $xRy$  stets  $yRx$  folgt.

**transitiv** • ist **transitiv** auf  $M$ , wenn aus  $xRy$  und  $yRz$  stets  $xRz$  folgt. \item  $R$  ist **Äquivalenzrelation** auf  $M$ , wenn  $R$  reflexiv, symmetrisch und transitiv auf  $M$  ist.

Eine Äquivalenzrelation gibt Anlaß zu einer disjunkten **äquivalenzklassen** Zerlegung der Menge  $M$  in die **Äquivalenzklassen**. Innerhalb einer solchen Klasse stehen je zwei Elemente in der Relation  $R$ , und umgekehrt gehören zwei in der Relation stehende Elemente von  $M$  stets zur selben Klasse.

## Index

### A

Abstand 1-18  
Äquivalenzklassen 1-26  
äußerer Graph 1-11  
Anfangsecke, Endecke einer Kantenfolge 1-11

### B

benachbarte Ecken 1-3  
bijektiv 1-26  
binäres Suchen 1-15  
bipartiter (paarer) Pseudograph 1-19  
Blätter zu einer Brücke 1-21  
Brücke 1-21

### D

disjunkte Mengen 1-25  
disjunkte Vereinigung 1-25  
Durchschnitt 1-25  
Durchschnitt und Vereinigung von Pseudographen 1-9

### E

echte Teilmenge 1-25  
Einschränkung einer Abbildung 1-26  
Element 1-25  
Endecke 1-18  
Entdecken einer Kante 1-1  
Endkante 1-18

### G

geordnetes  $n$ -Tupel 1-26  
Gerüst 1-16  
geschlossene, offene Kantenfolge 1-12  
Grad einer Ecke 1-3

### I

induzierter Teilgraph 1-8  
induzierter Untergraph 1-7

innerer Pseudograph 1-11

Inzidenz 1-1

### K

Komplement 1-25  
komponenten 1-14  
kreisloser Pseudograph 1-14

### L

Länge einer Kantenfolge 1-12

### M

Mengendifferenz 1-25

### N

$n$ -faches kartesisches Produkt 1-26  
 $n$ -regulärer Pseudograph 1-4

### S

spannender Baum 1-16  
Summe von Pseudographen über einem Graphen 1-10  
Summe von zwei Graphen 1-10

### T

Teilmenge 1-25

### V

verbindbare Ecken 1-13  
Vereinigung 1-25  
vollständiger Graph 1-2

### Z

Zusammenhang 1-13  
Zusammenhangs- 1-14

