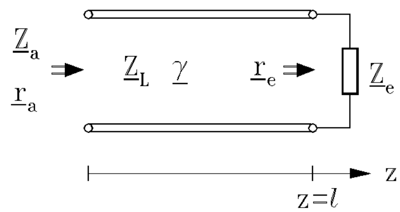
Impedanztransformation längs einer Leitung:



Zwischen Reflexionsfaktor $\underline{r}$ und Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ lautet der Zusammenhang:

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_L}{\underline{Z} + \underline{Z}_L} \;\Leftrightarrow\; \underline{Z} = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}}{1 - \underline{r}}$$

Die Transformation von Eingangswiderstand und Reflexionsfaktor längs einer Leitung der Länge l ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

	verlustbehaftet	verlustlos
	$\underline{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\beta = \sqrt{(R' + \mathrm{j}\omega L')(G' + \mathrm{j}\omega C')}$ $\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R' + \mathrm{j}\omega L'}{G' + \mathrm{j}\omega C'}}$	$\underline{\gamma} = \mathrm{j}\beta = \mathrm{j}\omega\sqrt{L'C'}$ $Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$
gegeben: $\underline{Z}_e$ gesucht: $\underline{Z}_a$	$\underline{Z}_a = \underline{Z}_L \cdot \frac{\underline{Z}_e + \underline{Z}_L \cdot \tanh(\underline{\gamma} l)}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_e \cdot \tanh(\underline{\gamma} l)}$	$\underline{Z}_a = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}_e + \mathrm{j} Z_L \cdot \tan(\beta l)}{\underline{Z}_L + \mathrm{j}\underline{Z}_e \cdot \tan(\beta l)}$
gegeben: $\underline{r}_e$ gesucht: $\underline{r}_a$	$\underline{r}_a = \underline{r}_e \cdot \mathrm{e}^{-2\underline{\gamma} l}$	$\underline{r}_a = \underline{r}_e \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}$
gegeben: $\underline{Z}_e$ gesucht: $\underline{r}_a$	$\underline{r}_a = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}_L}{\underline{Z}_e + \underline{Z}_L} \cdot \mathrm{e}^{-2\underline{\gamma} l}$	$\underline{r}_a = \frac{\underline{Z}_e - Z_L}{\underline{Z}_e + Z_L} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}$
gegeben: $\underline{r}_e$ gesucht: $\underline{Z}_a$	$\underline{Z}_a = \underline{Z}_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_e \cdot \mathrm{e}^{-2\underline{\gamma} l}}{1 - \underline{r}_e \cdot \mathrm{e}^{-2\underline{\gamma} l}}$	$\underline{Z}_a = Z_L \cdot \frac{1 + \underline{r}_e \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}}{1 - \underline{r}_e \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta l}}$

Strom- und Spannungsverlauf längs einer Leitung:

Der Strom- und Spannungsverlauf setzt sich zusammen aus einer hin- und einer rücklaufenden Welle

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \underline{U}_h \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} + \underline{U}_r \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma} z} \\ \underline{I}(z) &= \underline{I}_h \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} + \underline{I}_r \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma} z} \end{aligned} \qquad \text{mit} \qquad \frac{\underline{U}_h}{\underline{I}_h} = \underline{Z}_L \qquad \frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r} = -\underline{Z}_L$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \underline{U}_h \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} + \underline{U}_r \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma} z} \\ \underline{I}(z) &= \frac{1}{\underline{Z}_L} \cdot \left[\underline{U}_h \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} - \underline{U}_r \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma} z}\right] \end{aligned}$$

Sind Strom und Spannung am Anfang der Leitung bei $z = 0$ vorgegeben, so gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}(z = 0) &= \underline{U}_h + \underline{U}_r \\ \underline{I}(z = 0) &= \frac{1}{\underline{Z}_L}(\underline{U}_h - \underline{U}_r) \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \underline{U}_h &= \frac{1}{2}[\underline{U}(0) + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}(0)] \\ \underline{U}_r &= \frac{1}{2}[\underline{U}(0) - \underline{Z}_L \cdot \underline{I}(0)] \end{aligned}$$

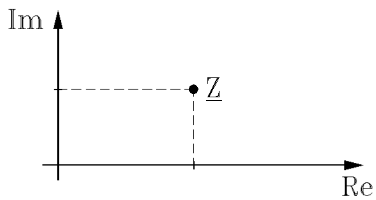
Damit haben Strom und Spannung den Verlauf

$$\begin{aligned} \underline{U}(z) &= \frac{1}{2}[\underline{U}(0) + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}(0)] \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} + \frac{1}{2}[\underline{U}(0) - \underline{Z}_L \underline{I}(0)] \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma} z} \\ \underline{I}(z) &= \frac{1}{2}\left[\frac{\underline{U}(0)}{\underline{Z}_L} + \underline{I}(0)\right] \cdot \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} z} - \frac{1}{2}\left[\frac{\underline{U}(0)}{\underline{Z}_L} - \underline{I}(0)\right] \cdot \mathrm{e}^{\underline{\gamma} z} \end{aligned}$$

Eigenschaften und Anwendungen des Smith–Diagramms bei verlustlosen Leitungen

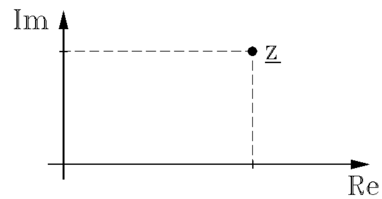
1. Ableitung des Smith-Diagramms

(a) komplexe $\underline{Z}$-Ebene



z.B. $\underline{Z} = (25 + \mathrm{j}50)\ \Omega$

(b) komplexe $\underline{z}$-Ebene

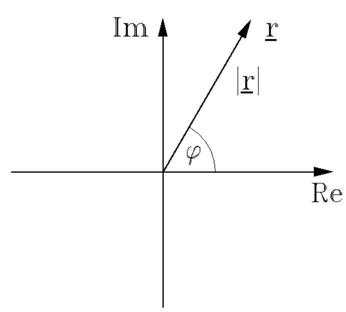


Normierung auf Wellenwiderstand z.B.
$Z_L = 50\ \Omega \Rightarrow \underline{z} = 0,5 + \mathrm{j}1$

(c) Abbildung in die $\underline{r}$-Ebene

$$\underline{r} = \frac{\underline{z} \Leftrightarrow 1}{\underline{z} + 1} = \frac{\Leftrightarrow 0,5 + \mathrm{j}1}{1,5 + \mathrm{j}1} = 0,62 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}82,9^\circ}$$

Smith–Diagramm: $\underline{r} = |\underline{r}| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$



2. Handhabung

   (a) Impedanzen $\underline{Z}$ eintragen:
      - darstellen mit Real- und Imaginärteil
      - normieren mit dem Wellenwiderstand Z_L: $\underline{z} = \underline{Z}/Z_L$
      - eintragen nach "krummen Koordinaten"

   (b) Admittanzen $\underline{Y}$ eintragen:
      - darstellen mit Real- und Imaginärteil
      - normieren mit dem Wellenwiderstand Z_L: $\underline{y} = \underline{Y} \cdot Z_L$
      - eintragen nach "krummen Koordinaten"

   (c) Ablesen des Reflexionsfaktors $\underline{r}$:
      - Abstand vom Anpassungspunkt $\equiv$ Betrag
      - Phase nach Grad–Skala im Smith–Diagramm ablesen. Rechnungen immer in Rad!
      - eintragen mit "Lineal und Winkelmaß"

   (d) Wichtige Skalen:
      - $|\underline{r}|$: vorteilhaft zum Eintragen eines Reflexionsfaktors
      - $|\underline{r}|^2$: Leistungsbetrachtugen z.B. $P_r = |\underline{r}|^2 \cdot P_h$
      - s: erspart das Umrechnen von $|\underline{r}|$ nach s gemäß $s = \dfrac{1+\underline{r}}{1 \Leftrightarrow \underline{r}}$ und umgekehrt

   (e) Zusammenhänge:
      - eingetragene Impedanz (Admittanz) mit Anpaßpunkt verbinden $\Rightarrow$ Zeiger des zugehörigen Reflexionsfaktors
      - vorgegebener Reflexionsfaktor: an der Spitze des Zeigers zugehörige Impedanz (Admittanz) ablesen in "krummlinigen" Koordinaten

   (f) Für Leitungstransformation l/λ-Skala benutzen:
      - zwei gegenläufige Skalen von $0 \ldots 0,5$
      - "Drehrichtung" bleibt im Widerstands- und Leitwertdiagramm gleich

   (g) Kennzeichnen, ob Impedanzen (Widerstandsdiagramm) oder Admittanzen (Leitwertdiagramm) eingetragen wurden

   (h) Eingetragene Punkte im SD möglichst beschriften

3. Markante Punkte im SD

   (a) Kurzschlußpunkt $\Big\}$ bei 0 und ∞, abhängig ob Widerstands- oder

   (b) Leerlaufpunkt Leitwertdiagramm

   (c) Anpassung an den Wellenwiderstand: $\underline{z} = 1$, $\underline{r} = 0$

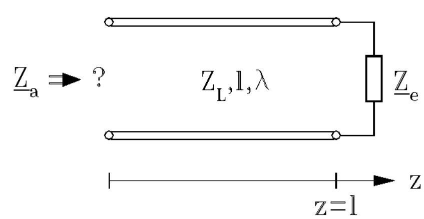
   (d) Verlustfreie Induktivitäten und Kapaziäten liegen auf dem Außenkreis (abgebildete Im-Achse des $\underline{Z}$-Bereichs) des SD

   (e) rein ohmsche Widerstände (Leitwerte) liegen auf der reellen Achse

4. Anwendungen

   (a) Umwandlung zwischen Impedanz $\underline{z}$ und Admittanz $\underline{y}$:
   - "Spiegeln" am Anpaßpunkt $\underline{z} \rightarrow \underline{y}$ oder äquivalent
   - zugehörigen Reflexionsfaktor $\underline{r}$ um 180° drehen $\rightarrow \Leftrightarrow\!\underline{r}$
   - Normierung transformiert sich mit: $\underline{z} = \dfrac{\underline{Z}}{Z_L}$, $\underline{y} = \underline{Y} \cdot Z_L$
   - Kreise bleiben Kreise ! (gleiche Durchmesser)

   (b) Transformation von Impedanzen und Admittanzen entlang von Leitungen
   - Ermittlung des Eingangswiderstandes einer Leitung

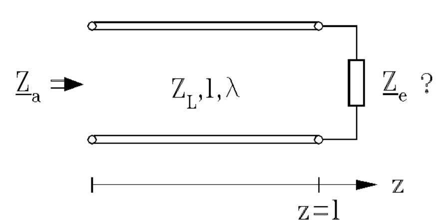


     i. $\underline{Z}_e$ (auf Z_L normiert eintragen)

     ii. Position auf l/λ-Skala in Richtung zum Generator feststellen

     iii. Um Leitungslänge in Richtung Generator drehen

   - Ermittlung des Abschlußwiderstandes einer Leitung mit bekanntem Eingangswiderstand $\underline{Z}_a$



i. $\underline{Z}_a$ (auf Z_L normiert eintragen)

ii. Position auf l/λ-Skala in Richtung zum Abschluß feststellen

iii. Um Leitungslänge in Richtung Abschluß drehen

Entsprechendes gilt für die Leitwerte $\underline{Y}_a$, $\underline{Y}_e$; die Drehrichtungen bleiben im Leitwertdiagramm erhalten.

- Umnormieren $Z_{L1} \to Z_{L2}$
  i. Punkte $\underline{z}_2 = \underline{z}_1 \dfrac{Z_{L1}}{Z_{L2}}$, $\underline{y}_2 = \underline{y}_1 \dfrac{Z_{L2}}{Z_{L1}}$ (Berechnung!)

  ii. Kreise bleiben Kreise! (aber: unterschiedliche Durchmesser $\to$ genaue Lage und Form über zwei oder drei markante Punkte berechnen)

(c) Parallelschaltung $\underline{Z}_1 || \underline{Z}_2$

- im Leitwertdiagramm arbeiten
- beide bezogenen Leitwerte addieren und Summenpunkt eintragen
- Kreis + Konstante = Kreis ! (aber: Streckung, Stauchung, Dehnung möglich)

(d) Reihenschaltung $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

- im Widerstandsdiagramm arbeiten
- siehe c) analog

(e) Anpaßtransformation mit Leitungsschaltungen und konzentrierten Bauelementen