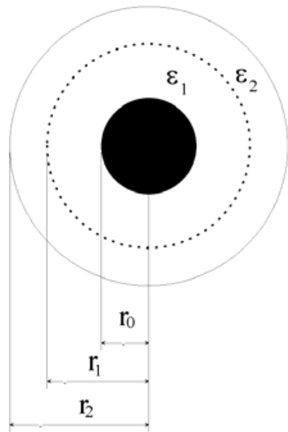
Aufgabe 3 (F'06): Elektrisches Feld

Ein Hochspannungskondensator habe folgende geometrische Anordnung:

- Innenelektrode, Radius $r_0 = 8\,\text{mm}$;
- festes Dielektrikum, $\varepsilon_{r1} = 4{,}5$;
- flüssiges Dielektrikum, $\varepsilon_{r2} = 2{,}5$;
- Außenelektrode, Radius $r_2 = 24\,\text{mm}$.



a) Unter welchen Bedingungen kann die Berechnung dieser Anordnung, der Skizze entsprechend, zweidimensional erfolgen?

b) Geben Sie den Verlauf der Radialkomponenten der elektrischen Feldstärken $E_1(r)$, $E_2(r)$ in beiden Dielektrika unter Verwendung der Teilspannungen $\hat{U}_{01}$ und $\hat{U}_{12}$ in allgemeiner Form an.

c) Welche Bedingung muss die elektrische Feldstärke an der Grenzschicht der Dielektrika erfüllen (Formel)?

d) Welchen Wert hat der Grenzschicht-Radius, wenn bekannt ist, dass die Maximalfeldstärken in beiden Dielektrika im Verhältnis $E_{1,\max} / E_{2,\max} = 1{,}5$ stehen?

e) Wie groß ist die anliegende Spannung $\hat{U}_{ges}$, wenn die Maximalfeldstärke

- im festen Dielektrikum $9{,}3\,\frac{\text{kV}}{\text{mm}}$ und
- im flüssigen Dielektrikum $6{,}2\,\frac{\text{kV}}{\text{mm}}$ beträgt?

(Rechnen Sie mit einem mittleren Radius von 20 mm, falls Ihnen der Wert für r_1 fehlt.)

Musterlösung zu Aufgabe 3

a) Ausreichend große Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene, so dass Randeffekte vernachlässigt werden können.

b) $E_1(r) = \dfrac{\hat{U}_{01}}{r \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}}$, $E_2(r) = \dfrac{\hat{U}_{12}}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}$ nach (20.10)

c) $E_1(r_1) \cdot \varepsilon_1 = E_2(r_1) \cdot \varepsilon_2$ nach (21.5)

Die Radialkomponenten müssen stetig sein, weil keine Grenzschicht-Ladung vorhanden ist.
Tangentialkomponenten treten wegen der vorhandenen Rotationssymmetrie nicht auf.

d) Die Maximalfeldstärke einer zylindrischen Anordnung tritt am inneren Rand auf (20.11):

$$E_1(r_0) = 1{,}5 \cdot E_2(r_1) \quad \Rightarrow \frac{\hat{U}_{01}}{r_0 \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}} = 1{,}5 \cdot \frac{\hat{U}_{12}}{r_1 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \Rightarrow \frac{\hat{U}_{01} \cdot r_1}{1{,}5 \cdot \hat{U}_{12} \cdot r_0} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad (*)$$

aus c) $$\Rightarrow \frac{\varepsilon_1 \cdot \hat{U}_{01}}{r_1 \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}} = \frac{\varepsilon_2 \cdot \hat{U}_{12}}{r_1 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \Rightarrow \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \hat{U}_{01}}{\varepsilon_{r2} \cdot \hat{U}_{12}} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_0}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad (**)$$

(*) = (**) $$\Rightarrow r_1 = 1{,}5 \cdot r_0 \cdot \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} = 1{,}5 \cdot 8\,\text{mm} \cdot \frac{4{,}5}{2{,}5} = \underline{\underline{21{,}6\text{mm}}}$$

e) $$\hat{U}_{ges} = \hat{U}_{01} + \hat{U}_{12} = E_{1,\max} \cdot r_0 \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} + E_{2,\max} \cdot r_1 \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad (20.11)$$

$$= 9{,}3\,\tfrac{\text{kV}}{\text{mm}} \cdot 8\,\text{mm} \cdot \ln \frac{21{,}6\,\text{mm}}{8\,\text{mm}} + 6{,}2\,\tfrac{\text{kV}}{\text{mm}} \cdot 21{,}6\,\text{mm} \cdot \ln \frac{24\,\text{mm}}{21{,}6\,\text{mm}}$$

$$= 73{,}9\,\text{kV} + 14{,}1\,\text{kV} = \underline{\underline{88{,}0\,\text{kV}}}$$

alternativ für $r_1 = 20\,\text{mm}$:

$$\hat{U}_{ges} = 9{,}3\,\tfrac{\text{kV}}{\text{mm}} \cdot 8\,\text{mm} \cdot \ln \frac{20\,\text{mm}}{8\,\text{mm}} + 6{,}2\,\tfrac{\text{kV}}{\text{mm}} \cdot 20\,\text{mm} \cdot \ln \frac{24\,\text{mm}}{20\,\text{mm}}$$

$$= 68{,}2\,\text{kV} + 22{,}6\,\text{kV} = \underline{\underline{90{,}8\,\text{kV}}}$$