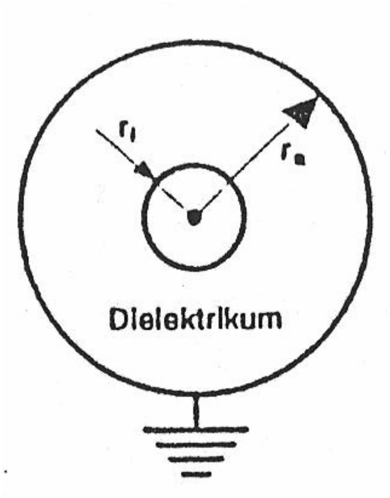
Aufgabe 5: ***Hochspannungskabel***

Ein Hochspannungskabel sei durch folgende Größen charakterisiert:



Nennspannung: $U_N = 110\,\mathrm{kV}$

Nennfrequenz: $f_N = 50\,\mathrm{Hz}$

Abmessungen: $r_i = 10\,\mathrm{mm}$

$r_a = 28\,\mathrm{mm}$

Dielektrikum: $\varepsilon_r = 2{,}4$

In der skizzierten Querschnittsfläche des Kabels können Randeffekte vernachlässigt werden.

a) Wo tritt die Maximalfeldstärke auf und wie groß ist sie?

b) Wie groß ist der Maximalwert des Potenzials φ ?

In das Dielektrikum des Kabels seien Raumladungen mit der Ladungsdichte $\rho = -1{,}8\,\mathrm{C/m^3}$ eindiffundiert.

c) Gilt für diesen Fall die Laplace- oder die Poissongleichung und wie lautet die allgemeine Form?

d) Beziehen Sie die unter c) gefundene Gleichung auf ein Hochspannungskabel (konzentrische Zylinder) und ermitteln Sie dann unter Ausnutzung der beiden Randbedingungen das Potenzial $\varphi(r)$ in allgemeiner Form (keine Zahlenwerte einsetzen!).

e) Berechnen Sie die maximale Feldstärke am Innenleiter.

f) Kann an einem frei geschalteten Kabel (beide Enden offen) aufgrund der Raumladungen eine Spannung auftreten? Begründung! Wenn ja, berechnen Sie diese, wenn die Feldstärke am Innenleiter zu Null angesetzt wird.

Musterlösung:

a) Die Maximalfeldstärke tritt an der Oberfläche des Innenleiters auf und hat (bei ladungsfreiem Dielektrikum) den Wert:

$$E_{\max} = \frac{\hat{U}}{r_i \cdot \ln\frac{r_a}{r_i}} = \frac{\pm 110\,\mathrm{kV} \cdot \sqrt{2}}{10 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot \ln\frac{28}{10}} = \underline{\underline{\pm 15{,}1 \cdot 10^{6}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}} \qquad (20.10)$$

b) $\varphi_{\max} = \varphi_{\max}(r_i) = U_{\max} = U \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{155{,}56\,\mathrm{kV}}}$

c) Wenn Raumladungen vorhanden sind, muss die Poissongleichung angesetzt werden:

$$\underline{\underline{divgrad\varphi = \Delta\,\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}} \qquad (20.7)$$

d) In Zylinderkoordinaten erhält die Poissongleichung die Form:

$$\frac{1}{\mathrm{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad , \ \text{Potenzial ist nur radiusabhängig}$$

$$r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 + C_1 \quad , \ \text{1. Integration}$$

$$\varphi(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot r^2 + C_1 \cdot \ln r + C_2 \quad , \ \text{2. Integration}$$

$$\text{1. Randbedingung} \quad : \quad \varphi(r_a) = 0 = -\frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot r_a^{\,2} + C_1 \cdot \ln r_a + C_2$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot r_a^{\,2} - C_1 \cdot \ln r_a$$

$$\text{2. Randbedingung} \quad : \quad \varphi(r_i) = U = -\frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot r_i^{\,2} + C_1 \cdot \ln r_i + C_2$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = U + \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot r_i^{\,2} - C_1 \cdot \ln r_i$$

$$0 = U + \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot (r_i^{\,2} - r_a^{\,2}) - C_1 \cdot (\ln r_i - \ln r_a)$$

$$C_1 = \frac{U + \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot (r_i^{\,2} - r_a^{\,2})}{\ln\frac{r_i}{r_a}}$$

$$\varphi(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot r^2 + \frac{U + \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot (r_i^{\,2} - r_a^{\,2})}{\ln\frac{r_i}{r_a}} \cdot \ln r + \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot r_a^{\,2} - \frac{U + \frac{\rho}{4\varepsilon} \cdot (r_i^{\,2} - r_a^{\,2})}{\ln\frac{r_i}{r_a}} \cdot \ln r_a$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot(r_a^{\,2} - r^2) + \frac{U + \frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot(r_i^{\,2} - r_a^{\,2})}{\ln\frac{r_i}{r_a}}\cdot\ln\frac{r}{r_a}$$

e) Die Berechnung der elektrischen Feldstärke nach $\vec{E} = -grad\varphi$ reduziert sich entsprechend auf die Radialkomponente:

$$E_r = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} = +\frac{\rho}{2\varepsilon}\cdot r - \frac{U + \frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot(r_i^{\,2} - r_a^{\,2})}{\ln\frac{r_i}{r_a}}\cdot\frac{1}{r}$$

$$E_{r_i,\max} = \frac{\rho\cdot r_i}{2\varepsilon} - \frac{\pm U_N\cdot\sqrt{2} + \frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot(r_i^{\,2} - r_a^{\,2})}{r_i\cdot\ln\frac{r_i}{r_a}}$$

$$E_{r_i,\max} = -423{,}7\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}} \pm 15108{,}8\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}} + 1407{,}5\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{m}} = 16{,}09\,\frac{\mathrm{MV}}{\mathrm{m}}$$

f) Nach d) ist die elektrische Feldstärke aus der 1. Integration gegeben durch:

$$E(r) = -\frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} = \frac{\rho}{2\varepsilon}\cdot r - C_1\cdot\frac{1}{r}\bigg|_{r=r_i} \overset{!}{=} 0 \quad , \qquad \text{Randbedingung für } E(r_i)$$

$$\Rightarrow\ C_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon}r_i^{\,2}$$

Der Außenleiter liegt wie vorher auf Erdpotenzial:

$$\varphi(r_a) = 0 = -\frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot r_a^{\,2} + C_1\cdot\ln r_a + C_2$$

$$\Rightarrow\ C_2 = \frac{\rho}{4\varepsilon}r_a^{\,2} - \frac{\rho}{2\varepsilon}r_i^{\,2}\ln r_a$$

Das Potential des Innenleiters ist dann gegeben durch:

$$\varphi(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot r^2 + \frac{\rho}{2\varepsilon}\cdot r_i^{\,2}\cdot\ln r + \frac{\rho}{4\varepsilon}r_a^{\,2} - \frac{\rho}{2\varepsilon}\cdot r_i^{\,2}\ln r_a\bigg|_{r=r_i}$$

$$\varphi(r_i) = \frac{\rho}{4\varepsilon}\cdot(r_a^{\,2} - r_i^{\,2}) + \frac{\rho}{2\varepsilon}\cdot r_i^{\,2}\cdot\ln\frac{r_i}{r_a} = \underline{\underline{-10{,}129\,\mathrm{kV}}}$$