

R. Stuhlmann-Laeisz

Philosophische Logik

Einheit 2:
Philosophische Prädikatenlogik

Fakultät für
**Kultur- und
Sozialwissen-
schaften**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden. Wir weisen darauf hin, dass die vorgenannten Verwertungsalternativen je nach Ausgestaltung der Nutzungsbedingungen bereits durch Einstellen in Cloud-Systeme verwirklicht sein können. Die FernUniversität bedient sich im Falle der Kenntnis von Urheberrechtsverletzungen sowohl zivil- als auch strafrechtlicher Instrumente, um ihre Rechte geltend zu machen.

Der Inhalt dieses Studienbriefs wird gedruckt auf Recyclingpapier (80 g/m², weiß), hergestellt aus 100 % Altpapier.

INHALT DER DOPPELKURSEINHEIT 2 DES KURSES 3394

Teil II	Philosophische Prädikatenlogik	5
0	Einleitung	5
1	Grundzüge der modalen Prädikatenlogik	7
1.1	Die formale Sprache MPL	7
1.2	Semantische Interpretation der Sprache MPL. Problem I: Existenzpräsuppositionen	11
1.3	Das alethische System T+PL	17
1.4	Problem II: Existenz als Prädikat	29
2	Verschärfungen des Basissystems T+PL	35
2.1	Die Verschärfung von T+PL durch das Existenz-Axiom	35
2.2	Verschärfungen von T+Ex-Ax. Probleme: III. Modalität und Existenz. IV. Modalität de re und Modalität de dicto	38
2.3	Noch einmal Problem IV: Modalität de re und Modalität de dicto	52
3	Wahrheitsbedingungen mit Existenzpräsupposition	56
3.1	Die Definition. Noch einmal Problem I: Existenzpräsuppositionen	56
3.2	Gültigkeit unter den Bedingungen der neuen Definition	63
3.3	Ein Beweissystem für die neue Semantik	68
3.4	Die Barcan-Formel	73
4	Probleme V und VI: Das (Frege-) Paradoxon der Identität und Sokrates' Rätsel der falschen Identitätsurteile	79
4.1	Präsentation des Frege-Paradoxons	79
4.1.1	Identitätsaussagen und Identitätsfragen	79
4.1.2	Repräsentation	84
4.2	Modale Prädikatenlogik mit Identität	86
4.3	Modalisierte Identitätsaussagen	89
4.3.1	Notwendigkeit	89
4.3.2	Epistemische Modalität: Identität und Verschiedenheit als Gegenstände des Meinens (Glaubens). Problem VI: Sokrates' Rätsel der falschen Identitätsurteile	91
5	Problem VII: Veränderung und Konstanz	97
5.1	Veränderung als Modalität	97
5.2	Die Sprache ZPLÄnd	98
5.3	Die semantische Interpretation der Sprache ZPLÄnd	100

5.4	Wahrheitsbedingungen für Aussagen der Sprache ZPLÄnd	102
5.5	Veränderung eines Individuums: Wechsel von Eigenschaften	105
	Bearbeitungshinweise zu den Übungsaufgaben zu Teil II	110

Teil II Philosophische Prädikatenlogik

0 Einleitung

Auch in der philosophischen Logik unterscheiden wir in kanonischer Weise zwischen einem aussagen- und einem prädikatenlogischen Teil. Dabei ist das prädikatenlogische Instrumentarium zur Analyse von normalsprachlich formulierten Aussagen bzw. zur Rekonstruktion von Argumentationen und Schlüssen, die sich der normalen Sprache bedienen, feiner als dasjenige der Aussagenlogik. Das folgende Beispiel soll dies erläutern. Wir betrachten drei Aussagen:

- (i) Notwendigerweise sind alle Schimmel Pferde.
- (ii) Es ist möglich, daß alle Pferde schlafen.
- (iii) Es ist möglich, daß alle Schimmel schlafen.

Die Analyse dieser drei Sätze mit den Mitteln der modalen Aussagenlogik würde als formale Gegenstücke in der Sprache MAL Aussagen der Form $N\alpha$, $M\beta$, und $M\gamma$ ergeben. Feiner können wir die logische Struktur hier nicht erfassen. Daraus ergibt sich nun auch eine negative Antwort auf die Frage, ob die Aussage (iii) aus den beiden Aussagen (i) und (ii) *folgt*: Eine Subjunktion der Form $N\alpha \wedge M\beta \supset M\gamma$ ist in keinem unserer Systeme der modalen Aussagenlogik gültig. Deshalb ist der Schluß von der Prämissenmenge $\{N\alpha, M\beta\}$ auf die Konklusion $M\gamma$ nicht korrekt. Dieses Ergebnis ist aber kontraintuitiv. Die folgende informelle Argumentation zeigt nämlich, daß die Aussage (iii) doch aus den beiden Aussagen (i) und (ii) erschlossen werden kann: Wegen (ii) ist eine Situation j (eine Welt) möglich, in der alle Pferde schlafen. Wegen (i) gilt in dieser Situation (wie in jeder anderen möglichen Situation auch), daß alle Schimmel Pferde sind. Also folgt, daß in der Situation (möglichen Welt) j alle Schimmel schlafen. (Für die Situation j folgt dies nach dem Aristotelischen Syllogismus „Barbara“.) Demnach ist es möglich, daß alle Schimmel schlafen, und damit ist (iii) aus (i) und (ii) erschlossen. Dieser Schluß macht von Mitteln Gebrauch, die die philosophische Aussagenlogik nicht enthält. Die philosophische Prädikatenlogik soll uns diese Mittel nun zur Verfügung stellen.

In Teil I haben wir gesehen, daß das Instrumentarium der philosophischen Aussagenlogik in besonderer Weise geeignet ist, bei der Behandlung philosophischer Probleme eingesetzt zu werden. Dies gilt auch für die Prädikatenlogik. Hier werden wir uns die folgenden Komplexe ansehen: Problem I: Existenzpräsuppositionen; Problem II: Existenz als Prädikat; Problem III: Modalität und Existenz; Problem IV: Modalität *de re* und Modalität *de dicto*;

Problem V: Das (Frege)-Paradoxon der Identität; Problem VI: Sokrates' Rätsel der falschen Identitätsurteile; Problem VII: Veränderung und Konstanz.

Die Probleme I - IV werden im Rahmen der alethischen Modallogik erörtert; V und VI werden mit alethischen und mit Mitteln der Glaubenslogik behandelt; Problem VII gehört in die Zeitlogik.

1 Grundzüge der modalen Prädikatenlogik

1.1 Die formale Sprache MPL

Wie in der Aussagen- so entwickeln wir auch in der Prädikatenlogik eine formale Sprache in der Weise, daß wir zunächst ihr Vokabular vorstellen und dann die syntaktischen Regeln formulieren, nach denen die Aussagen (und andere *Formeln*) aus dem Vokabular gebildet werden können.

1.1.1 Das Vokabular der Sprache MPL:

Vokabular

Das Vokabular der Sprache MPL besteht aus logischen Konstanten, aus nicht-logischen (*deskriptiven* oder *inhaltlichen*) Konstanten und aus Variablen.

Logische Konstanten sind:

- (i) die schon in der Aussagenlogik benutzten (extensionalen) Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$;
- (ii) die beiden Quantoren: \forall, \exists ;
- (iii) die (ebenfalls schon bekannten) beiden Modaloperatoren: M, N;
- (iv) ein einstelliger Prädikator: E.

Im Unterschied zur elementaren (nicht-modalen) Prädikatenlogik haben wir also unter den logischen Konstanten ein Zeichen „E“, das syntaktisch als ein Prädikator fungiert; wir lesen diesen Prädikator „existiert“: E ist ein Existenzprädikator.

Nicht-logische Konstanten:

- (i) Prädikatoren (große lateinische Buchstaben mit Indices):
 $P^1, P_1^1, P_2^1, P_3^1, \dots$
 $P^2, P_1^2, P_2^2, P_3^2, \dots$

 $Q^1, Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, \dots$
 $Q^2, Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, \dots$

 R^1, \dots
 R^2, \dots

 S^1, \dots
 S^2, \dots

Wir benutzen also die Buchstaben „P“, „Q“, „R“ und „S“ zur Erzeugung von Prädikatoren. Die unteren Indices dienen nur zur Unterscheidung: P_1^1 ist ein anderer Prädikator als P^1 oder P_2^1 . Die oberen Indices geben die Stelligkeit

des Prädikators an: S^1 ist ein einstelliger Prädikator, wie z. B. das normalsprachliche Wort „sterblich“. P_4^2 ist ein zweistelliger Prädikator, wie etwa das normalsprachliche Wort „kleiner“. Wir haben Prädikatoren beliebiger Stelligkeit, in dieser Hinsicht ist unsere Sprache also reicher als die normale, natürliche Sprache.

(ii) Individuenkonstanten (kleine lateinische Buchstaben vom Anfang des Alphabets mit unteren Unterscheidungsindices):

a, a_1 , a_2 , ...

b, b_1 , b_2 , ...

c, c_1 , ...

d, ...

e, ...

Weiter enthält das Vokabular Individuenvariable (kleine lateinische Buchstaben vom Ende des Alphabets mit unteren Unterscheidungsindices):

x, x_1 , x_2 , ...

y, y_1 , y_2 , ...

z, z_1 , z_2 , ...

Schließlich enthält unser Vokabular noch die Klammern (,) als Gliederungszeichen.

1.1.2 Syntaktische Regeln für die Bildung von Formeln und Aussagen:

(Um diese Regeln formulieren zu können, werden wir uns wieder mit metasprachlichen Variablen auf die Elemente des Vokabulars beziehen. Ferner werden wir den Ausdruck „Individuensymbol“ benutzen, um auszudrücken, daß ein Zeichen eine Individuenkonstante *oder* eine Individuenvariable ist): Wir lernen zunächst die Regeln zur Bildung von Formeln kennen.

(i) Atomare Formeln:

a) Ist v ein Individuensymbol, dann ist Ev eine atomare Formel (gelesen: „ v existiert“).

b) Sind v_1, \dots, v_n Individuensymbole und ist Φ^n ein n -stelliger Prädikator, dann ist $\Phi^n v_1 \dots v_n$ eine atomare Formel.

c) Weitere atomare Formeln gibt es nicht.

(ii) Formeln:

a) Jede atomare Formel ist eine Formel.

b) Sind α und β Formeln, dann sind auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \supset \beta)$, $(\alpha \equiv \beta)$, $M\alpha$ und $N\alpha$ Formeln.

c) Ist α eine Formel und v eine Individuenvariable, dann sind $\forall v\alpha$ und $\exists v\alpha$ Formeln (gelesen: „für alle v gilt: α “ oder „alles ist α “ bzw. „es gibt ein v , für welches gilt: α “ oder „einiges ist α “).

d) Nur solche Zeichenfolgen, die nach den Regeln a) - c) erzeugt

Syntaktische Regeln
zur Bildung von Formeln

worden sind, sind Formeln von MPL.

Klammereinsparungen verabreden wir entsprechend Nr. 1.2.3 aus Teil I.

Wir sehen uns einige Beispiele für Formeln an:

(i) Ea , (ii) Ex , (iii) $\exists xEx$, (iv) $P^2xy \supset NQ^1a$, (v) $\forall x(MP^1x \supset Q^1x)$, (vi) $\forall x(P^1x \supset \exists yP^2xy)$, (vii) NR^2xy , (viii) MR^2ay , (ix) NR^2ab , (x) $\forall xMR^2xy$, (xi) $M\forall xN\exists yR^2xy$.

Übungsaufgaben:

(Ü1) Zeigen Sie mit Hilfe der Bildungsregeln, daß die Zeichenfolgen (i) - (xi) Formeln der Sprache MPL sind!

(Ü2) Entscheiden Sie, welche der folgenden Zeichenfolgen Formeln sind und welche nicht: (i) $N\forall xP^1y$, (ii) $P^1a \supset P^1b$, (iii) $\exists yP^2ab$, (iv) MP^2abz , (v) $N\forall xP^1a$!

Übungsaufgaben

Formeln und Aussagen: In der Aussagenlogik dienen die syntaktischen Formationsregeln zur Bildung von Ausdrücken, die durch die semantische Interpretation der Sprache - durch Gegenüberstellung eines Modells - eo ipso mit einem Wahrheitswert versehen werden. Diese Ausdrücke sind Aussagen, sie - und nur sie - fallen bei semantischer Interpretation in die Unterscheidung des Wahren von dem Falschen. Dies gilt nun nicht für die nach den beschriebenen Regeln erzeugten *Formeln*. In ihnen können ja Individuenvariable vorkommen, und ein solches Vorkommen kann bewirken, daß eine Formel auch nach semantischer Interpretation nicht mit einem Wahrheitswert versehen ist. Dies gilt beispielsweise für die oben aufgeschriebenen Formeln (ii), (iv), (vii), (viii) und (x), es gilt nicht für die anderen dort stehenden Formeln. Wir können das folgendermaßen einsehen: Wenn wir die Formel P^1x semantisch interpretieren, dann - das werden wir alsbald sehen - weisen wir dem einstelligen Prädikator P^1 eine Bedeutung zu, wir beschreiben oder benennen nämlich eine Klasse von Dingen und sagen: P^1x bedeutet bei dieser Interpretation dasselbe wie, daß x ein Element dieser Klasse ist; dabei bleibt aber unbestimmt, auf welche Entität sich die Variable x bezieht, und deshalb erhält die Formel P^1x keinen Wahrheitswert, sie steht nicht für das Wahre oder das

Falsche, ihre Bedeutung ist vielmehr dieselbe wie die des Prädikators P^1 . Deshalb ist P^1x keine *Aussage*.

Das Vorkommen einer Individuenvariablen in einer Formel verhindert nicht eo ipso, daß diese auch eine Aussage ist. Wenn wir vor die Formel P^1x einen mit der Variablen x erscheinenden Quantor schreiben, etwa $\forall x$, und so die neue Formel $\forall xP^1x$ erzeugen, dann haben wir, wie man terminologisch sagt,

Formeln und Aussagen

die Variable x *gebunden*, vorher war sie *frei*. Die Formel $\forall x P^1 x$ lesen wir als „alles ist P^1 “, oder auch „alle Dinge sind P^1 “. Wir sehen nun: *Diese* Formel wird wahr oder falsch, sobald dem Prädikator P^1 eine Bedeutung zugewiesen wird. Sie ist eine Aussage, denn in ihr kommt an keiner Stelle eine Variable frei vor, vielmehr kommt die Variable x überall gebunden vor.

Wir wollen das freie bzw. gebundene Vorkommen von Variablen in Formeln hier nicht exakt definieren. Es soll aber an einigen weiteren Beispielen erläutert werden, so daß wir unseren Blick dafür schärfen. Ganz allgemein gilt übrigens dies: Das Vorkommen einer Variablen unmittelbar hinter einem der beiden Quantoren \forall, \exists ist *immer gebunden*.

Beispiele: (i) In der Formel $\forall x(P^1 x \supset Q^1 x) \wedge S^1 x$ kommt die Variable x insgesamt viermal vor. Das erste Vorkommen (gezählt von links) ist unmittelbar hinter einem Quantor, also gebunden. Auch das zweite und dritte Vorkommen sind gebunden, denn die Quantifizierung $\forall x$ bezieht sich auf diese Stellen. Wir sagen auch: Diese beiden Vorkommnisse liegen *im Bereich* eines Quantors; und es kommt immer darauf an, diesen Bereich richtig einzugrenzen. In unserem Falle endet er bei der Klammer hinter dem dritten Vorkommen von x . Die Teilformel bis dorthin können wir lesen „für alle x gilt: wenn x ein P^1 ist, dann ist x ein Q^1 “. Dieser Teil enthält keine Variable frei; er ist eine Aussage. Das vierte Vorkommen von x ist frei, denn es liegt ja nicht mehr im Bereich der Quantifizierung $\forall x$. Insgesamt handelt es sich bei dieser Formel nicht um eine Aussage. Wir sehen hier auch, daß ein und dieselbe Variable in einer Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommen kann. (ii) In der Formel $\forall y(P^1 y \supset N\exists x R^2 xy)$ kommt keine Variable frei vor. (iii) $M(P^1 x \wedge Q^1 a) \supset \forall x(NP^1 x \supset Q^1 y)$. Hier ist das erste Vorkommen von x frei, alle anderen Vorkommnisse von x sind gebunden, das einzige Vorkommen von y ist frei. (iv) $\forall x P^1 x \supset NQ^1 x$. Hier sind nur das erste und das zweite Vorkommen von x gebunden, denn der Bereich der Quantifizierung $\forall x$ endet mit dem zweiten Vorkommen von x . Wir lesen die Formel „wenn alles P^1 ist, dann ist x notwendigerweise ein Q^1 “; wir dürfen die Formel nicht verwechseln mit (v) $\forall x(P^1 x \supset NQ^1 x)$, in der x nur gebunden vorkommt. (vi) $\forall x(\forall x P^1 x \supset NQ^1 x)$. Hier kommt x nur gebunden vor; das einzige in (iv) noch freie Vorkommen von x wird durch die weitere Quantifizierung (ganz links stehend) gebunden.

Wir benutzen nun den soweit erläuterten Begriff des freien Vorkommnisses einer Variablen, um den Begriff der Aussage zu definieren.

1.1.3 Definition („Aussage“):

Eine Formel ohne freie Vorkommnisse von Variablen ist eine *Aussage* der Sprache MPL.

Gebundenes und freies Vorkommen von Variablen

Bereich eines Quantors

Aussagen der Sprache MPL