

Wilhelm Büttemeyer

Einführung in die formale Logik

Fakultät für
**Kultur- und
Sozialwissen-
schaften**

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form (Druck, Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) ohne schriftliche Genehmigung der FernUniversität reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden. Wir weisen darauf hin, dass die vorgenannten Verwertungsalternativen je nach Ausgestaltung der Nutzungsbedingungen bereits durch Einstellen in Cloud-Systeme verwirklicht sein können. Die FernUniversität bedient sich im Falle der Kenntnis von Urheberrechtsverletzungen sowohl zivil- als auch strafrechtlicher Instrumente, um ihre Rechte geltend zu machen.

Der Inhalt dieses Studienbriefs wird gedruckt auf Recyclingpapier (80 g/m², weiß), hergestellt aus 100 % Altpapier.

Inhaltsverzeichnis

Der Autor des Studienbriefes	6
Lehr- und Lernziele	8
Danksagung	9
Lektürehinweis	9
1 Hinführung zur Thematik des Kurses	10
2 Klassische Aussagenlogik	15
2.1 Aussagesätze, Aussagen, zusammengesetzte Aussagen ..	15
2.1.1 Aussagesätze	15
2.1.2 Aussagen	20
2.1.3 Zusammengesetzte Aussagen	23
2.2 Die Sprache der Aussagenlogik	27
2.2.1 Syntax der Sprache der Aussagenlogik	30
2.2.2 Semantik der Sprache der Aussagenlogik	34
2.3 Anwendungen	37
2.3.1 Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit	38
2.3.2 Äquivalenzen	42
2.3.3 Junktorenbasen	47
2.3.4 Übersetzung umgangssprachlicher Sätze	52
2.4 Schluss und Fehlschluss in der Aussagenlogik	61
2.4.1 Argumentation, Schluss und logische Folgerung	62
2.4.2 Semantische Prüfung von Schlüssen	65
2.4.3 Fehlschlüsse	73
2.4.4 Syntaktische Prüfung von Schlüssen	80
2.4.4.1 Kalkül des natürlichen Schließens (1)	82
2.4.4.2 Sonderformen der Ableitung	86
3 Assertorische Syllogistik	96
3.1 Aristoteles' assertorische Syllogistik	96
3.1.1 Aussagesatz und Term	97
3.1.2 Syllogismus	100
3.1.3 Figur	103

3.2	Die Modi in der traditionellen Terminologie	108
3.2.1	Die Modi der ersten Figur	111
3.2.2	Die Modi der anderen Figuren	118
3.2.2.1	Die Modi der zweiten Figur.....	118
3.2.2.2	Die Modi der dritten Figur.....	120
3.2.2.3	Weitere Modi	122
3.3	Die Zurückführung der Syllogismen	125
3.4	Schluss, Beweis und Wissenschaft bei Aristoteles.....	130
3.4.1	Die Syllogistik als „Sache der beweisenden Wissenschaft“	133
3.4.2	Logische Grundlagen der syllogistischen Axiomatik	138
3.5	Schlussbetrachtung.....	140
4	Klassische Prädikatenlogik	144
4.1	Term, Prädikator, Quantor.....	144
4.2	Syntax der Sprache der Prädikatenlogik	147
4.3	Kalkül des natürlichen Schließens (2)	151
4.3.1	Ableitungen mit Allquantoren	153
4.3.2	Ableitungen mit Existenzquantoren.....	159
4.3.3	Hinweise und Einschränkungen.....	163
4.3.4	Prädikatenlogische Gesetze	169
4.4	Semantik der Sprache der Prädikatenlogik	170
4.4.1	Interpretation, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit	170
4.4.2	Übersetzung in die Sprache der Prädikatenlogik ...	176
4.4.2.1	Übersetzung nicht-quantifizierter Aussagen	176
4.4.2.2	Übersetzung quantifizierter Aussagen	179
4.5	Anwendungen	185
4.5.1	Schluss und Fehlschluss in der Prädikatenlogik	185
4.5.2	Identität	192
4.5.3	Konsistenz und Unabhängigkeit von Annahmen ...	196
5	Zwischenbemerkungen	201
5.1	Charakteristik der Klassischen Prädikatenlogik.....	201
5.2	Metalogische Betrachtungen	205

6 Grundzüge der alethischen Modallogik	211
6.1 Merkmale modaler Sätze und Ausdrücke	213
6.2 Die Syntax der alethischen Modallogik	216
6.3 Semantische Aspekte der alethischen Modallogik	219
6.3.1 Übersetzung	220
6.3.2 Wahrheit und Falschheit nicht-quantifizierter modaler Sätze	222
6.4 Systeme der Modallogik	227
6.5 Ableitungsregeln und Ableitungen	230
7 Weiterführende Literatur	235
8 Musterlösungen	238
8.1 Hinweis	238
8.2 Musterlösungen zur Aussagenlogik	238
8.3 Musterlösungen zur Syllogistik	249
8.4 Musterlösungen zur Prädikatenlogik	252
8.5 Musterlösungen zur alethischen Modallogik	265
9 Symbolverzeichnis	268
10 Fachwortverzeichnis	269

Der Autor des Studienbriefes

Wilhelm Büttemeyer

Institut für Philosophie, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Schwerpunkte in Forschung und Lehre

- Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie
- Philosophie der Mathematik
- Logik
- italienische Philosophie des 19. und 20. Jahrhunderts
- Musikästhetik

Curriculum vitae et studiorum

Studium der Philosophie, Mathematik und Musikwissenschaft in Münster, Pavia (Italien), Mailand und Bochum

Erste Philologische Staatsprüfung in Philosophie und Mathematik an der Universität Münster

„Diploma di Perfezionamento in Filosofia“ an der Staatsuniversität Mailand

Promotion zum Dr. phil. an der Ruhr-Universität Bochum

Wissenschaftlicher Assistent an der Pädagogischen Hochschule Niedersachsen und an der Universität Oldenburg

Habilitation für Philosophie und Privatdozent an der Universität Oldenburg

Professor auf Zeit und seit 1988 apl. Professor an der Universität Oldenburg

Gastdozent an Universitäten in Mailand, Bremen, Rostock und Siena

ausländisches korrespondierendes Mitglied der Galilei-Akademie der Wissenschaften und Künste in Padua

Vorsitzender der Filosofia Italiana-Stiftung, Oldenburg

Veröffentlichungen

1) Monographien

Wissenschaftstheorie. Eine Einführung (mit Stephan Kornmesser), Berlin 2020

Logik zur Einführung, Hamburg 2014

Ernesto Grassi – Humanismus zwischen Faschismus und Nationalsozialismus, Freiburg/München 2009, ²2010

Wissenschaftstheorie für Informatiker, Stuttgart 1995

Der erkenntnistheoretische Positivismus Roberto Ardigòs mit seinen zeitgeschichtlichen Beziehungen, Meisenheim am Glan 1974

Roberto Ardigò e la psicologia moderna, Firenze 1969

2) Herausgegebene Bücher

Philosophie der Mathematik, Freiburg/München 2003, ³2009

Übersetzung – Sprache und Interpretation (mit Hans Jörg Sandkühler), Frankfurt/M. 2000

Roberto Ardigò: *Lettere edite ed inedite*,

Bd. II: 1895–1920, Frankfurt/M. 2000

Bd. I: 1850–1894, Frankfurt/M. 1990

Der Positivismusstreit in der deutschen Erziehungswissenschaft (mit Bernhard Möller), München 1979

Roberto Ardigò / Pasquale Villari: *Carteggio 1868-1916*, Firenze 1973

3) Aufsätze (Auswahl)

Die Anwendbarkeit der Mathematik, „Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg“ 38, 2018, S. 93–116

I metodi della psicologia secondo Roberto Ardigò, in: *Le origini della psicologia italiana*, hg. v. N. Dazzi u. G. P. Lombardo, Bologna 2011, S. 39–57

Zeit und Bewegung. Anmerkungen zu Hobbes, Geulincx, Locke und Kant, in: *Die Realität der Zeit*, hg. v. J. Kreuzer u. G. Mohr, München 2007, S. 41–58

Popper on Definitions, „*Journal for General Philosophy of Science*“ 36, 2005, S. 15–28

Philosophie in geometrischer Ordnung, in: *Philosophie in literarischen und ästhetischen Gestalten*, hg. v. R. Schulz, Oldenburg 2005, S. 15–33

„Wissenschaft ist Theorie und Kunst zugleich“ – Hans Jonas' Wissenschaftsauffassung im Verhältnis zu Technik und Ethik, in: *Hans Jonas – von der Gnosisforschung zur Verantwortungsethik*, hg. v. W. E. Müller, Stuttgart 2003, S. 185–195

Sind populärwissenschaftliche Darstellungen Übersetzungen?, in: *Übersetzung – Sprache und Interpretation*, hg. v. W. Büttemeyer u. H. J. Sandkühler, Frankfurt/M. 2000, S. 151–167

Der italienische Positivismus in neuer Sicht?, „*Archiv für Geschichte der Philosophie*“ 79, 1997, S. 212–218

Ardigò e Mach, „*Rivista di storia della filosofia*“ 46, 1991, S. 109–126

Early Approaches to Analytic Philosophy in Italy, „*Scientia*“ (Milano) Jg. 80, Bd. 121, 1986, S. 65–75

Zwei Schreiben Gottlob Freges an Giovanni Vailati, „*Archiv für Geschichte der Philosophie*“ 67, 1985, S. 289–291

Gedanken zur Rezeptionsgeschichte der Philosophie, in: *La storia della filosofia come sapere critico. Studi offerti a Mario Dal Pra*, Milano 1984, S. 718–734

Aspetti epistemologici della psicologia di Roberto Ardigò, in: *Gli studi di psicologia in Italia: Aspetti teorici scientifici e ideologici (= Domus Galilaeana: Quaderni di storia e critica della scienza, N. S. 9)*, hg. v. G. Cimino u. N. Dazzi, Pisa 1980, S. 11–22

Einleitende Bemerkungen zur Geschichte des Positivismusproblems, in: *Der Positivismusstreit in der deutschen Erziehungswissenschaft*, hg. v. W. Büttemeyer u. B. Möller, München 1979, S. 11–44

L'attuale discussione epistemologica nella psicologia tedesca, in: *Problemi di teoria e storia della psicologia (= Domus Galilaeana: Quaderni di storia e critica della scienza, N. S. 6)*, hg. v. N. Dazzi u. M. Tricarico, Pisa 1978, S. 145–163

Der Streit um positivistische Erziehungswissenschaft in Deutschland, „*Scientia*“ (Milano) Jg. 69, Bd. 110, 1975, S. 419–437

Idealistischer Positivismus als Fiktionalismus, „*Kant-Studien*“ 59, 1968, S. 468–486

Lehr- und Lernziele

Bei einem Wissensgebiet, das schon vor etwa 2370 Jahren erstmals schriftlich fixiert wurde, dann vor etwa 130 Jahren eine grundlegende Erneuerung erfuhr und seitdem in verschiedenen didaktisch geeigneten Ansätzen standardisiert vorliegt, wird niemand von dem Autor eines einführenden Studienbriefs erwarten, dass er „das Rad neu erfindet“. Er soll vielmehr die Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten vermitteln, von denen aus das vertiefende Eindringen in dieses Gebiet möglich wird und letztlich der Anschluss an den gegenwärtigen Wissens- und Forschungsstand gewonnen werden kann. Die vorliegende Einführung in die Formale Logik für Studierende der Philosophie greift diese Erwartungen auf und setzt sie sich zum Ziel.

Unabdingbar für die weitergehende Beschäftigung mit anderen Gebieten der Logik ist die Beherrschung der *Aussagen- und Prädikatenlogik*. Deren Darstellung folgt hier in semantischer Hinsicht der Methode der Wahrheitswerttafeln, die von Emil Post und Ludwig Wittgenstein entwickelt wurde, und Alfred Tarskis modelltheoretischer Semantik sowie in syntaktischer Hinsicht Gerhard Gentzens Kalkül des natürlichen Schließens in der von Patrick Suppes aufbereiteten Form. Die Kenntnis der (assertorischen) *Syllogistik*, die auf Aristoteles zurückgeht und im Mittelalter mnemotechnisch verbessert wurde, ist ebenfalls wünschenswert für das weitere Studium der Philosophie, insbesondere ihrer Geschichte. Denn viele Philosophen setzen in ihren Schriften die Grundgedanken, Grundbegriffe und Modi der Syllogistik als bekannt voraus. Ebenso nützlich für eine vertiefte Beschäftigung mit philosophischen Texten ist schließlich ein Einblick in die *Modallogik*, die – erstmals von Aristoteles dargestellt – seit dem Beginn des 20. Jahrhunderts ein fester Bestandteil der Logik ist. Dagegen müssen weiterführende Themen, wie die Kennzeichnungslogik, wegen des geringen Kursumfanges unberücksichtigt bleiben. Für die informelle Logik und die Zeitlogik sowie für die Vertiefung der deontischen und Modallogik sei auf die entsprechenden Studienbriefe (*Einführung in die informelle Logik* und *Philosophische Logik*) verwiesen.

Wer sich den Inhalt dieses Studienbriefs angeeignet und die Übungsaufgaben bearbeitet hat, sollte am Ende

- (1) eine Vorstellung vom Sinn und Zweck der Formalen Logik sowie von ihrem Gegenstand und ihrer Erkenntnisform haben,
- (2) die wichtigsten Grundbegriffe, Methoden und Theorieaspekte der Aussagen- und Prädikatenlogik, der Syllogistik und – in Ansätzen – der Modallogik kennen,
- (3) die erlernten Methoden so anwenden können, dass er die logische Struktur von Begriffen, Sätzen und Argumentationen erkennt, leichte logische Beweise führen kann, Argumentationen und Beweise nachzuvollziehen und im Hinblick auf ihre logische Korrektheit zu prüfen

vermag und fähig ist zu entscheiden, ob vorgefundene Äußerungen über logische Sachverhalte zutreffen.

Danksagung

Vom Sommersemester 1977 bis zum Wintersemester 2010-2011 hatte ich immer wieder Gelegenheit, Vorlesungen zur Logik zu halten. Dabei habe ich nicht nur auf die Kenntnisse zurückgegriffen, die mir Hans Hermes, Ettore Casari und Maria Luisa Dalla Chiara in ihren Lehrveranstaltungen vermittelt hatten, sondern habe außerdem nach und nach verschiedene Lehrbücher benutzt (und zum Teil rezensiert). Deren Auswahl hing zum Teil davon ab, ob es sich um eine eher philosophisch oder eine eher mathematisch zusammengesetzte Hörerschaft handelte: die *Grundzüge der theoretischen Logik* von David Hilbert und Wilhelm Ackermann, die *Einführung in die moderne Logik* von Franz von Kutschera und Alfred Breitkopf, den *Grundkurs im logischen Schließen* von Eike von Savigny, die *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik* von Wolfgang Rautenberg, die *Einführung in die mathematische Logik* von Heinz-Dieter Ebbinghaus, Jörg Flum und Wolfgang Thomas, *Introduction to Logic* von Patrick Suppes und *Beginning Logic* von Edward John Lemmon. Sehr viel verdanke ich auch Anregungen und Rückmeldungen von Seiten meiner Studierenden, Tutor*innen und Kolleg*innen, von denen ich – in der Hoffnung, niemandem Unrecht zu tun, stellvertretend für alle – Claudia Anger, Andreas Hettler, Achim Ilchmann, Holger Leerhoff, Jens Lemanski, Alfred Olszok, Daniel Schubbe, Hubert-Martin Schüler, Mark Siebel, Nils Springhorn, Michael Sukale, Thomas Wachtendorf und Elke Wilkeit besonders hervorheben möchte.

Lektürehinweis

Es empfiehlt sich, ergänzend zur Durcharbeitung des vorliegenden Studienbriefes die *Logisch-semantische Propädeutik* von Ernst Tugendhat und Ursula Wolf (Nachdruck der durchgesehenen Ausgabe, Stuttgart, Reclam, 2014) zu lesen.

1 Hinführung zur Thematik des Kurses

Warum soll man sich mit Logik beschäftigen? Ist nicht, wie René Descartes meinte, der gesunde Menschenverstand „die bestverteilte Sache der Welt“ und „das Vermögen, richtig zu urteilen und das Wahre vom Falschen zu unterscheiden, [...] von Natur in allen Menschen gleich“¹? Leider ist das durchaus nicht der Fall, wie Sie leicht feststellen können. Erzählen Sie doch einmal, wenn Sie mit Freunden zusammensitzen, die folgende Geschichte: Sie seien im letzten Winter durch den Ort gegangen und hätten bei einem Lama einen Jungen stehen sehen, der eine Sammelbüchse in der Hand hielt und ein Schild trug mit der Aufschrift: „Wer Tiere liebt auf dieser Welt, gibt gerne etwas Futtergeld“. Fragen Sie dann, ob es zulässig ist, aus diesem Satz darauf zu schließen, dass diejenigen, die kein Futtergeld geben, nicht tierlieb sind. – Sie können in Ihrem Freundeskreis auch fragen, wie die korrekte Verneinung des Sprichworts „Es ist nicht alles Gold, was glänzt“ lautet:

- (a) Es ist alles Gold, was nicht glänzt;
- (b) Es ist nicht alles Gold, was nicht glänzt; oder
- (c) Es ist alles Gold, was glänzt.

Für diejenigen, die Schwierigkeiten haben, zu diesen Fragen auf Anhieb die richtigen Antworten zu finden, gibt es einen Trost: Nach der Durcharbeitung des Studienbriefes sollten sie in der Lage sein, die beiden Fragen zu beantworten.

Formale Logik im Philosophiestudium?

Warum aber sollen sich Studierende der Philosophie mit Formaler Logik beschäftigen? Die traditionelle, vor langer Zeit von Aristoteles begründete Form der Logik, die Syllogistik, gilt heute als „bruchstückhaft“, weil ihr etliche Teile der modernen Logik fehlen. Zudem nennt man sie „unzureichend“, weil sie nur Eigenschaften von Dingen, jedoch keine Beziehungen zu erfassen erlaubt. Aber auch die neue Logik wirkt auf viele wie ein von wenigen Logik-Experten und Mathematikern oder Informatikern betriebenes Spezialgebiet ohne philosophische Relevanz. Hat sie nicht der Mathematiker Gottlob Frege ins Leben gerufen, weil er Grundlagenprobleme der Arithmetik lösen wollte? Verfolgte er damit nicht ein Programm, das schon bald an der Russellschen Antinomie scheiterte? Nennt man sie nicht sogar „mathematische Logik“? Wurden die Lehrstühle für Logik, wenn es sie seinerzeit an deutschen Universitäten überhaupt gab, nicht von den philosophischen Instituten in die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultäten abgeschoben? Lebte die Logik seitdem nicht gewissermaßen im Konkubinat mit der Mathematik?

¹ R. Descartes: *Discours de la méthode – Abhandlung über die Methode des richtigen Vernunftgebrauchs*, I, 1, übers. v. Kuno Fischer.

Die durch diese Fragen suggerierte Ansicht ist allerdings unzutreffend. Wenn die Logik für die Mathematik und die Informatik von Nutzen ist, dann muss das ja nicht bedeuten, dass sie für die Philosophie unnützlich ist. Tatsächlich lässt sich in letzter Zeit eine Trendumkehr beobachten. War die Logik in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts tatsächlich stark mit der Lösung von Grundlagenproblemen der Mathematik und der Klärung ihres eigenen Selbstverständnisses und Leistungsvermögens beschäftigt, so traten seitdem mehr und mehr philosophisch relevante Themen in den Vordergrund: neue Aspekte der auf Aristoteles zurückgehenden Modallogik, Probleme der wenn-dann-Beziehung, die Logik von Fragen und Antworten, die Logik der Werte und Normen, die Zeitlogik, die Ereignislogik, semantische Fragen an der Grenze von Sprachphilosophie und Logik, die Fuzzy Logic usw. Wer sich heute an deutschen Universitäten umsieht, stellt überrascht fest, dass es inzwischen an ihren philosophischen Instituten eine ganze Reihe von Lehrstühlen für Logik (manchmal in Verbindung mit der Theoretischen Philosophie, Wissenschaftstheorie oder Sprachphilosophie) gibt: in Berlin, Bochum, Bonn, Dresden, Düsseldorf, Frankfurt/Main, Greifswald, Jena, Konstanz, Leipzig, München, Münster und Tübingen.

Da die Logik ein altes Teilgebiet der Philosophie bildet, dessen Ursprung bis auf Aristoteles, das heißt, bis ins 4. Jahrhundert v. Chr. zurückgeht, kann es angesichts ihrer langen Geschichte kaum verwundern, dass die Frage, womit sie sich befasst und wie sie dies tut, immer wieder anders beantwortet wurde. Nach einer verbreiteten Auffassung hat sie es mit Begriffen, Urteilen und Schlüssen zu tun: mit Begriffen („Griechen“, „Philosoph“), weil diese die Bausteine derjenigen Begriffsbeziehungen sind, die die Philosophen „Urteile“ nennen („Einige Griechen waren Philosophen“), und mit Schlüssen, weil diese sich aus Urteilen zusammensetzen („Einige Griechen waren Philosophen. Also trifft es nicht zu, dass kein Grieche ein Philosoph war“). Wenn man sich schon einmal mit Begriffen, Urteilen und Schlüssen befasst, dann liegt es nahe zu fragen, welche Arten von Begriffen, Urteilen und Schlüssen es gibt. Man kann auch die Frage stellen, wie – oder unter welchen Bedingungen – diese Begriffe, Urteile und Schlüsse gebildet werden. Eine so weit gefasste Logik wäre von der Erkenntnistheorie nicht mehr zu unterscheiden; und ein Lehrbuch zur Logik müsste mindestens so umfangreich sein wie die *Kritik der reinen Vernunft* von Immanuel Kant.

Logik: Analyse von Begründungen

Deshalb werden die *Aufgaben der Logik* seit einiger Zeit stärker von denen anderer philosophischer Disziplinen abgegrenzt. Die Frage, wie Begriffe, Urteile und Schlüsse zustandekommen, überlässt man der Erkenntnistheorie oder der Psychologie. Insbesondere der deutsche Mathematiker und Logiker Gottlob Frege hat immer wieder darauf hingewiesen, wie wichtig es sei, *logische* Fragestellungen von – wie er sagte – „psychologischen“ Fragestellungen zu unterscheiden. In der Logik gehe es nämlich nicht um die

Entstehung von Erkenntnissen, sondern um deren Begründung und Geltung. Demnach komme dem Begriff der logischen Folgerung und der Form der Beweisführung besondere Bedeutung zu; und die Frage nach den Arten der Begriffe und Urteile wird erst von hier her aufgerollt.

– sprachbezogen

Mit der Beschränkung auf logische Fragestellungen und Aufgaben geht eine Neubestimmung des *Gegenstandsbereichs* der Logik einher. Die traditionelle Logik verstand die Begriffe, Urteile und Schlüsse als Denkvorgänge. Dagegen bezieht sich die neuere Logik lieber auf Wörter (oder Terme), Sätze und Satzverbindungen. Sie hält die *sprachliche* Ebene für leichter zugänglich als die gedankliche. Interessanterweise gab schon Aristoteles im ersten Kapitel seiner *Ersten Analytik* dieser Auffassung Ausdruck: Schlüsse werden aus Sätzen gebildet, und Sätze wie Schlüsse sind eine Art der Rede (Lógos). Im Laufe der Jahrhunderte änderte sich jedoch die Auffassung vom Gegenstand der Logik. Aufschlussreich sind in diesem Zusammenhang die beiden einflussreichsten Logik-Lehrbücher des 17. Jahrhunderts: Joachim Jungius' *Hamburgische Logik* (1638) und der einschlägig betitelte Traktat *La logique ou l'art de penser* (1662) von Antoine Arnauld und Pierre Nicole, in dem auf die „Kunst des Denkens“ Bezug genommen wird. Sie bezogen die Logik auf Begriffe, Urteile und Schlüsse und bestimmten diese als „Tätigkeiten des Geistes“.² Noch George Boole, der im 19. Jahrhundert zu den Erneuerern der Formalen Logik gehörte, gründete die Logik in seinem Hauptwerk *An Investigation of the Laws of Thought* (1854) auf die „Gesetze des Denkens“. Erst Gottlob Freges *Begriffsschrift* (1879) lässt den sprachlichen Aspekt im Titel und Untertitel des Werkes erneut klarer hervortreten: *Begriffs-schrift* als *Formel-sprache* des reinen Denkens.

– formal

Es dürfte einleuchten, dass es in der Logik nicht möglich ist, einzelne Sätze, Schlussfolgerungen oder Beweise *inhaltlich* zu prüfen. Wer Logik betreibt, kann sich nicht zugleich in sämtlichen Geistes-, Sozial-, Wirtschafts-, Natur- und Technikwissenschaften auskennen. Einen derart überzogenen Anspruch hat die Logik jedoch nie erhoben. Stattdessen nimmt ihre Methode den Ausgang von der Feststellung, dass bestimmte Sätze oder Schlüsse eine bestimmte *Form* aufweisen und schon allein wegen dieser Form gültig sind.

Was damit gemeint ist, dass die Logik von der Klärung inhaltlicher Einzelfragen absieht und sich in methodischer Hinsicht auf die *Untersuchung formaler Beziehungen zwischen Wörtern und Sätzen* beschränkt, mag das folgende simple Beispiel andeuten. Angenommen, wir würden nach der Geltung des Satzes „Es regnet“ gefragt. Dann müssten wir die tatsächlichen

² J. Jungius: *Logica Hamburgensis*, hg. v. R. W. Meyer, Hamburg 1957, S. 1 u. 402; A. Arnauld: *Die Logik oder die Kunst des Denkens*, übers. v. Chr. Axelos, Darmstadt 2017, S. 25.

Wetterverhältnisse außerhalb unserer Wohnung irgendwie zur Kenntnis nehmen – sei es, dass wir gerade von draußen kommen, sei es, dass wir aus dem Fenster sehen oder auf das Trommeln auf dem Dach achten. Anders verhält es sich bei dem Satz „Es regnet, oder es regnet nicht“, dessen Geltung wir bequem im Sessel sitzend bestätigen können. Er ist ebenso gültig wie der Satz „Es gibt Marsmenschen, oder Marsmenschen gibt es nicht“. Denn er weist die Form „X oder nicht X“ auf, das heißt, die beiden Möglichkeiten der Bejahung und der Verneinung, auf die wir uns normalerweise beschränken, und nichts Weiteres. Ein anderes Beispiel: Nachdem jemand einem Freund seine Sicht der Dinge erläutert hatte, fragte er diesen: „Ist es nun so, oder ist es nicht so?“ Darauf erwiderte der Freund: „Du hast Recht; es ist so, oder es ist nicht so.“

Ähnliches gilt für den Schluss „Einige Politiker waren bestechlich. Also trifft es nicht zu, dass kein Politiker bestechlich war“. Dieser Schluss ist ebenso gültig wie der soeben erwähnte von den philosophierenden Griechen und aus demselben Grund: Sie weisen beide eine bestimmte, identische und logisch schlüssige Form auf. Weil die Logik auf diese Weise vom Inhalt der Urteile und Schlüsse absieht und ihr Augenmerk auf die formale Seite richtet, weil ihr mehr an formaler Geltung und Schlüssigkeit als an inhaltlicher Wahrheit gelegen ist, spricht man von *Formaler Logik*.

Selbstverständlich genösse die Logik nicht ihren guten Ruf, wenn sie nur mit solchen Fragen zu tun hätte, die auf den ersten Blick banal wirken (sich allerdings bei genauerem Hinsehen als gar nicht ganz so banal herausstellen). Sie ist nämlich auch ein *regulatives* Wissensgebiet. Das heißt, sie gibt Regeln für die Definition von Begriffen, für die Bildung von Schlüssen oder das Führen von Beweisen und für deren Prüfung vor. Wie hilfreich ist Leibniz' Definition: „*Eins* ist als das zu verstehen, was wir durch einen [!] Akt des Verstandes [...] erfassen“³? Wäre es besser, solche Begriffsbestimmungen, die etwas durch sich selbst erklären, zu vermeiden? Wie gültig ist der folgende Schluss, der in einer Disputation Martin Luthers vorkommt? „Alle dem Lamm Gottes Folgenden sind Jungfrauen. Aber kein Verheirateter ist eine Jungfrau. Also folgt kein Verheirateter dem Lamm Gottes.“⁴ Es wäre sicherlich gut, Schlussregeln zu kennen, die uns helfen, die Gültigkeit dieses und ähnlicher Schlüsse zu beurteilen.

– regulativ

³ G. W. Leibniz: „Dissertatio de arte combinatoria“, in ders.: *Sämtliche Schriften und Briefe*, Hg. Akademie der Wissenschaften der DDR, 6. Reihe, 1. Bd., 2. verb. Nachdruck, Berlin 1990, S. 163–230, bes. 170: „*Unum* autem esse intelligitur quicquid uno actu intellectus, s[ive] simul, cogitamus.“

⁴ M. Luther: „Die Zirkulardisputation über das Recht des Widerstands gegen den Kaiser“, in ders.: *Martin Luthers Werke. Kritische Gesamtausgabe*, Bd. 39 (Weimar 1926), Abt. 2, S. 34–91, bes. 79.

Fassen wir die vier genannten Gesichtspunkte zusammen, so können wir die Formale Logik folgendermaßen charakterisieren:

Formale Logik

Die *Formale Logik*, so wie sie hier dargestellt wird, resultiert aus einem sprachorientierten Standpunkt; somit hat sie Wörter, Sätze und Satzverbindungen zum Gegenstand. Sie untersucht die Geltung von Sätzen und die Schlüssigkeit von (Folgerungs-)Beziehungen zwischen Sätzen – und zwar, sofern sie sich allein aus formalen Gründen ergeben. Sie möchte die Gründe der formalen Geltung bzw. Schlüssigkeit erkennen und in Regeln festhalten.

– ihr Zweck

Auf dieser Grundlage besteht der *Zweck* der Formalen Logik darin, beim schlüssigen Argumentieren Hilfestellung zu leisten und die Überprüfung von Argumentationen anderer Personen im Hinblick auf ihre Schlüssigkeit zu erleichtern. Für den weitergehenden (hier aus Umfangsgründen ausgeklammerten) Fall der axiomatischen Darstellung wissenschaftlicher Theorien soll sie Methoden bereitstellen, die zur Kontrolle der Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der Axiome dieser Theorien sowie zur Ableitung aller Schlussfolgerungen aus gegebenen Voraussetzungen dienen können.

Die Grundlage für diese Aufgaben und für die verschiedenen oben erwähnten neueren Forschungsgebiete der philosophischen Logik bildet die Aussagen- und Prädikatenlogik. Allerdings stand am Anfang der geschichtlichen Entwicklung formallogischer Systeme die aristotelische Syllogistik, nicht die Aussagenlogik, die erst später bei den Stoikern eine gründliche Darstellung erhielt. Auch die neuere Entwicklung der Logik seit Gottlob Frege nahm ihren Ausgang nicht von der Aussagenlogik, sondern von der Prädikatenlogik in einer die Aussagenlogik umfassenden Gestalt. Das zeigt, dass die Aussagenlogik durchaus nicht in dem Sinne „grundlegend“ ist, dass der Aufbau der Prädikatenlogik (oder anderer Teilgebiete der Logik) erst erfolgen könne, nachdem die Aussagenlogik zuvor erarbeitet worden ist. Die Aussagenlogik spielt, genau genommen, weder aus historischer noch aus systematischer Sicht eine erstrangige Rolle. Wenn unsere Darstellung trotzdem mit ihr beginnt, so hat das ausschließlich didaktische Gründe. Die Aussagenlogik bildet nämlich eine in sich geschlossene Theorie, die einfacher und unkomplizierter ist als die Prädikatenlogik oder andere Logiksysteme. Wichtige logische Begriffe und Methoden, theoretische und metatheoretische Zusammenhänge, die analog in anderen Bereichen der Logik wiederkehren, lassen sich anhand der Aussagenlogik leichter darstellen und verstehen.

2 Klassische Aussagenlogik

2.1 Aussagesätze, Aussagen, zusammengesetzte Aussagen

Je nach der Art der untersuchten Sätze erhält man unterschiedliche Arten der Logik. Ein Beispiel liefern Sätze über Mögliches und Notwendiges, wie „Es ist möglich, dass die Wahl erfolgt“ oder „Es ist notwendig, dass die Wahl erfolgt“.

Offensichtlich folgt aus der bloßen Möglichkeit der Wahl nicht ihre Notwendigkeit. Dagegen ergibt sich aus der Annahme, die Wahl sei notwendig, die Schlussfolgerung, dass es nicht möglich ist, dass sie nicht erfolgt. Derartige Sätze über Mögliches und Notwendiges und ihre formalen Beziehungen analysiert die *Modallogik*. In ähnlicher Weise untersucht die *Interrogativlogik* Fragen sowie die Eigenschaften formaler Beziehungen zwischen Fragen und Antworten; die *Imperativlogik* befasst sich mit vorschreibenden Äußerungen, wie Aufforderungen und Befehlen, usw. Die Satzart, auf die sich dagegen die Aufmerksamkeit der *Aussagen-* und *Prädikatenlogik* richtet, ist der Aussagesatz.

2.1.1 Aussagesätze

Für die Aussagen- und Prädikatenlogik sind allerdings durchaus nicht alle Aussagesätze von unmittelbarer Brauchbarkeit.

Betrachten wir zum Beispiel die beiden Sätze:

„Kim studiert Logik“ und
„Kim unterrichtet Uli“.

syntaktische
Mehrdeutigkeit

Der erste Satz besagt fraglos, dass das Subjekt Kim das Objekt Logik studiert. Dagegen ist die Aussage des zweiten Satzes nicht eindeutig. Neben der Möglichkeit, dass Kim Uli unterrichtet, besteht – insbesondere bei entsprechender Betonung – auch die Möglichkeit, dass Uli (Subjekt) Kim (Objekt) unterrichtet. Angenommen, jemand hätte behauptet, Uli unterrichte Alex. Dann könnte eine andere Person dies richtigstellen, indem sie sagt: „Nein, *Kim* unterrichtet Uli“. Die Syntax der deutschen Sprache zwingt nicht zur Reihenfolge Subjekt – Objekt; sie lässt es zu, das Objekt voranzustellen, um es hervorzuheben. Das Verständnis wird hier (und bei anderen Gelegenheiten) zusätzlich durch die Formenbildung im Deutschen erschwert. Denn den verschiedenen Fällen der Deklination entsprechen nicht immer unterschiedliche Endungen oder Präpositionen. In unserem Beispiel unterscheidet sich der Nominativ der Namen „Kim“ und „Uli“ nicht vom Akkusativ. Dadurch ergibt sich in Verbindung mit der Stellung von Subjekt und Objekt

die Zweideutigkeit des Satzes, aus dem sich nun in logisch unerwünschter Weise voneinander abweichende Schlüsse ziehen lassen.

Andere syntaktisch bedingte Mehrdeutigkeiten können auftreten, wenn unklar bleibt, worauf sich eine *Beifügung* bezieht oder wie eine *Reihung* von Teilsätzen zu verstehen ist. „Die Interpretation des Messergebnisses als etwas Subjektives ist für uns wesentlich“ – ist hier die Interpretation oder das Messergebnis subjektiv? – „Logiker teilen Begriffe ein oder analysieren Wörter und geben Definitionsregeln an“. Ist ‚entweder Begriffseinteilung oder Wortanalyse mit Regelangabe‘ gemeint, also: „Logiker teilen Begriffe ein, oder sie analysieren Wörter und geben Definitionsregeln an“? Oder ist Regelangabe in jedem Fall der Alternative gemeint, also: „Logiker teilen Begriffe ein oder analysieren Wörter, außerdem geben sie Definitionsregeln an“? Anders gesagt: Ist [A oder (B und C)] oder [(A oder B) und C] gemeint?

Definition 2.1: Ein Satz ist in einer Sprache S genau dann *syntaktisch mehrdeutig*, wenn seine syntaktische Form in S mehr als eine Lesart (Sinnzuweisung) zulässt.

semantische
Mehrdeutigkeit

Neben der *syntaktischen* Mehrdeutigkeit bei *Sätzen* gibt es bekanntlich die *semantische Mehrdeutigkeit von Wörtern*, im Fall der Zweideutigkeit auch „Ambiguität“ genannt. Fast alle wichtigen philosophischen Fachausdrücke gehören hierzu. Denn jeder große Philosoph verstand sie anders. Man denke nur an den Gebrauch des Wortes „Idee“ bei Platon (ewiges Urbild), John Locke (durch Sinneswahrnehmung und Reflexion gewonnene Vorstellung) oder Immanuel Kant (über die Erfahrung hinausgehender Vernunftbegriff). In einem allgemein-philosophischen Kontext ist das Wort „Idee“ ohne nähere Erklärung immer mehrdeutig; in einer Abhandlung speziell über Locke mag man die Lockesche Wortbedeutung unterstellen, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Semantische Mehrdeutigkeit ist in der Logik immer dann unerwünscht, wenn unklar ist, welchen Sinn Sätze, in denen mehrdeutige Wörter vorkommen, haben sollen, und sich deshalb problematische Schlussfolgerungen ergeben. „Ideen sind Urbilder.“ „Ideen entstehen durch Sinneswahrnehmung.“ Darf ich daraus schließen: Ideen sind durch Sinneswahrnehmung entstandene Urbilder?

Inhalt und Umfang
von Begriffen

Ein weiteres Problem stellen Sätze mit *vagen* Ausdrücken dar. Solche Ausdrücke werden oft mit mehrdeutigen Wörtern verwechselt. Der Unterschied zwischen vagen und mehrdeutigen Ausdrücken lässt sich aber mit Hilfe der Unterscheidung zwischen der *Intension* (dem Inhalt) und der *Extension* (dem Umfang) eines Begriffs bzw. Ausdrucks erläutern. Zwischen dem Inhalt und dem Umfang eines Begriffs unterschieden Arnauld und Nicole schon 1662 in ihrer *Logique*; Gottlob Frege übertrug den Unterschied 1892 in dem Aufsatz *Über Sinn und Bedeutung* von Begriffen auf Schriftzeichen; noch heute findet der Unterschied unter den Bezeichnungen „Intension“ und

„Extension“ Beachtung.⁵ Zur Erläuterung muss zunächst zwischen singulären und generellen Termen unterschieden werden.

Sprachliche Ausdrücke (Schriftzeichen, Wörter) finden unter anderem als Namen, Eigenschafts- oder Hauptwörter Verwendung. Ein *Name* („Sokrates“, „Miez“, „Abendstern“) dient dem Zweck, ein bestimmtes Lebewesen oder einen bestimmten Gegenstand zu *benennen*. Ein *Eigenschafts-* oder *Hauptwort* („elegant“, „Katze“, „Tisch“) dient dazu, diejenigen Lebewesen oder Gegenstände zu *bezeichnen* und zusammenzufassen, welche die betreffende Eigenschaft besitzen. Ein Ausdruck der ersten Art heißt *singulärer Term*, ein Ausdruck der zweiten Art *genereller Term*. Der Einfachheit halber wird im Folgenden in allen diesen Fällen für das Benannte oder Bezeichnete nur das Wort „Gegenstand“ verwendet.

singulärer Term,
genereller Term

Die *Extension*, die einem Ausdruck einer bestimmten Sprache entspricht, ist der Gegenstand, den er benennt, bzw. die Gesamtheit der Gegenstände, die er bezeichnet. – Die Extension des Namens „Teufelchen“ ist die Katze meines Arbeitskollegen, die des Eigenschaftsworts „hölzern“ die Gesamtheit der aus Holz bestehenden Dinge; zur Extension des kantischen Fachausdrucks „Idee“ gehören die Seele, die Welt und Gott.

Extension

Mit der *Intension*, die zu einem Ausdruck einer bestimmten Sprache gehört, sind die Eigenschaften und Beziehungen des Gegenstands oder der Gegenstände gemeint, auf die sich der Ausdruck benennend oder bezeichnend bezieht. – Zur Intension des Namens „Teufelchen“ gehören die Eigenschaften, eine kleine, schwarze, aggressive, zweijährige Katze zu sein, sowie die Beziehung, meinem Arbeitskollegen zu gehören. Zur Intension des Eigenschaftsworts „hölzern“ gehört die Eigenschaft, aus Holz zu bestehen, brennbar zu sein usw.

Intension

So entspricht einem gegebenen sprachlichen Ausdruck in einem bestimmten Zusammenhang eine bestimmte Intension und dieser wiederum eine bestimmte Extension. Doch ist die Beziehung insgesamt komplizierter, als auf den ersten Blick zu vermuten wäre. Wir müssen mindestens die folgenden vier Fälle berücksichtigen. (1) Der Fall der *semantischen Mehrdeutigkeit* von Wörtern kam schon zur Sprache. Hier entspricht einem sprachlichen Ausdruck (in unterschiedlichen Zusammenhängen oder zu unterschiedlichen Zeiten) mehr als eine Intension (mit den zugehörigen

⁵ Arnauld: *Die Logik*, zit., Teil I, Kap. VI, S. 48; G. Frege: „Über Sinn und Bedeutung“, in ders.: *Funktion, Begriff, Bedeutung*, hg. v. G. Patzig, Göttingen 2008. Zur Zurückführung der Unterscheidung bis auf Thomas de Vio vgl. E. Walther-Klaus: *Inhalt und Umfang*, Hildesheim 1987, Kap. 2. Man beachte den Unterschied von Intension und Intention!

Extensionen). Umgekehrt lässt sich (2) die mit einem sprachlichen Ausdruck verbundene Intension durch andere Wörter (manchmal sogar derselben Sprache) ausdrücken. Wörter mit derselben Intension heißen *synonym*. Beispiele dafür sind Abkürzung / Abbrüviatur und Negation / Verneinung. Es kann (3) für ein und dieselbe Extension mehrere Bezeichnungen geben. Zum Beispiel wird der Planet Venus auch „Morgenstern“ oder „Abendstern“ genannt. Dabei sind die drei Ausdrücke, wie schon Frege in dem erwähnten Aufsatz hervorhob, zusätzlich mit unterschiedlichen Intensionen verbunden, die sich aus dem Erscheinen des Sterns am Morgen oder am Abend ergeben. Es kommen sogar (4) Ausdrücke mit *leerer Extension* vor; das heißt, ihnen entspricht kein Gegenstand oder Gegenstandsbereich. Beispiele dafür sind die Ausdrücke „hölzernes Eisen“ oder „kreisrundes Siebeneck“.

semantische Mehrdeutigkeit / Vagheit

Mit Hilfe der Erklärung der Begriffe „Intension“ und „Extension“ lassen sich nun mehrdeutige und vage Ausdrücke in einer für unsere Zwecke ausreichenden Genauigkeit bestimmen und voneinander unterscheiden.

Definition 2.2: Ein Ausdruck A ist in einer Sprache S genau dann *semantisch mehrdeutig*, wenn A in S mehr als eine Intension besitzt.
Ein Ausdruck einer Sprache S heißt genau dann *vage*, wenn er eine nicht eindeutig umgrenzte Extension besitzt.

Obwohl viele Ausdrücke semantisch mehrdeutig sind und somit mehr als eine Intension besitzen, kann ihre Extension durchaus eindeutig wirken. Der Ausdruck „Bundespräsidenten bis zum Ende des Jahres 2020“ ist offensichtlich mehrdeutig; denn man kann ihn auf die schweizerischen, die österreichischen oder die deutschen Bundespräsidenten, aber auch auf alle zusammen beziehen. Da jedoch feststeht, wer das Amt des Bundespräsidenten in der Schweiz, in Österreich und in Deutschland bis zu diesem Stichtag bekleidete, ist die Extension des Ausdrucks zu jeder der vier Intensionen eindeutig festgelegt. Der Ausdruck ist also mehrdeutig, wirkt aber nicht unbedingt vage.

Anders sieht es mit dem Ausdruck „verkehrsgünstige Lage“ aus, der oft bei Hotels oder Immobilien Verwendung findet. Autofahrer werden ihn mit einer schnell erreichbaren Autobahnauffahrt verbinden, andere mit der Nähe zum Bahnhof, Hafen oder Flughafen; und außerdem werden die Meinungen darüber auseinandergelassen, welche Entfernung von diesen Orten noch als verkehrsgünstig gilt. Somit ist unklar, welche Objekte diesem Ausdruck entsprechen, das heißt: welche Objekte zu seiner Extension gehören, welche nicht. Schon seit dem Altertum werden ähnliche Fragen erörtert: Wann bildet eine Ansammlung einzelner Sandkörner einen Sandhaufen? Wann hört ein Sandhaufen, von dem ein Sandkorn nach dem anderen weggenommen wird, auf, ein Sandhaufen zu sein? Die Ausdrücke „verkehrsgünstige Lage“ und „Sandhaufen“ sind also vage.

Es gibt aus logischer Sicht noch eine weitere Schwierigkeit bei Aussagesätzen, die sich an dem folgenden Satz zeigt: „Er heiratet sie heute in der Kreisstadt“. Würden wir „er“ durch beliebige männliche, „sie“ durch beliebige weibliche Namen ersetzen und für „heute“ beliebige Datumsangaben, für „Kreisstadt“ Namen beliebiger Kreisstädte auswählen, dann ließen sich aus dem Ausgangssatz durch Einsetzung sehr viele – meist falsche – Sätze ableiten. So etwas würde jedoch einem Grundgedanken der Logik widersprechen, wonach bei logischen Folgerungen aus Zutreffendem niemals Unzutreffendes resultieren darf. Ursache derartiger Missverständnisse und Fehlschlüsse sind Personal-, Possessiv- und Demonstrativpronomina, unbestimmte Zeit-, Orts- oder Umstandsangaben. Diese sind nicht selbst mit einer bestimmten Intension verknüpft sind; sie verweisen vielmehr auf Anderes und beziehen ihre Bedeutung jeweils von dorthier. Deshalb heißen sie *Indikatoren* (auch *indexikalische* oder *deiktische* Ausdrücke).

Indikatoren

Definition 2.3: Ein sprachlicher Ausdruck ist genau dann ein *Indikator* (oder ein *indexikalischer* Ausdruck, *deiktischer* Ausdruck), wenn er auf die Situation, in der er verwendet wird (sprechende, angesprochene, zugehörige Personen, vorher oder nachher Gesagtes, Zeitpunkt, Ort, Umstände), verweist und seine Bedeutung von dieser Situation abhängt.

Solche Verweisungen sind nicht syntaktischer oder semantischer Art. Denn dabei spielt weder die Zusammensetzung der Wörter aus Buchstaben oder ihre grammatisch korrekte Zusammenstellung in Sätzen noch der – überhaupt nicht vorhandene – Bezug auf eine Intension eine Rolle. „Er“ und „sie“ beziehen sich im obigen Beispielsatz auf zwei dem Sprecher oder Erzähler (und wohl auch dem Angesprochenen) bekannte Personen, „heute“ auf den Tag, an dem die Mitteilung stattfindet, usw. „Sie“ kann an anderer Stelle auch mit Bezug auf Hannah Arendt, Susan Sontag oder andere Personen bzw. Gegenstände weiblichen Geschlechts verwendet werden. Mit anderen Worten: der Sinn von Sätzen mit Indikatoren hängt nicht nur von der Syntax und der Semantik, sondern auch von dem Kontext der Äußerung (der Gesprächssituation, dem Textzusammenhang) ab. Die sprachtheoretische Untersuchung dieses Kontextes nennt man mit Charles Morris⁶ *Pragmatik*: sie untersucht die Abhängigkeit der Bedeutung sprachlicher Ausdrücke von dem Kontext der Äußerung (Gesprächssituation, Textzusammenhang), in der sie verwendet werden.

Pragmatik

⁶ Ch. Morris: *Foundations of the Theory of Signs*, Chicago 1938; dt.: *Grundlagen der Zeichentheorie*, übers. v. R. Posner, München 1972 u.ö.