R. Stuhlmann-Laeisz

Philosophische Logik

Einheit 2:
Philosophische Prädikatenlogik

Fakultät für
Kultur- und Sozialwissen-schaften

FernUniversität in Hagen

Der Inhalt dieses Studienbriefs wird gedruckt auf Recyclingpapier (80 g/m², weiß), hergestellt aus 100 % Altpapier.

INHALT DER DOPPELKURSEINHEIT 2 DES KURSES 3394

Teil II Philosophische Prädikatenlogik

0 Einleitung

Auch in der philosophischen Logik unterscheiden wir in kanonischer Weise zwischen einem aussagen- und einem prädikatenlogischen Teil. Dabei ist das prädikatenlogische Instrumentarium zur Analyse von normalsprachlich formulierten Aussagen bzw. zur Rekonstruktion von Argumentationen und Schlüssen, die sich der normalen Sprache bedienen, feiner als dasjenige der Aussagenlogik. Das folgende Beispiel soll dies erläutern. Wir betrachten drei Aussagen:

(i) Notwendigerweise sind alle Schimmel Pferde.

(ii) Es ist möglich, daß alle Pferde schlafen.

(iii) Es ist möglich, daß alle Schimmel schlafen.

Die Analyse dieser drei Sätze mit den Mitteln der modalen Aussagenlogik würde als formale Gegenstücke in der Sprache MAL Aussagen der Form $N\alpha$, $M\beta$, und $M\gamma$ ergeben. Feiner können wir die logische Struktur hier nicht erfassen. Daraus ergibt sich nun auch eine negative Antwort auf die Frage, ob die Aussage (iii) aus den beiden Aussagen (i) und (ii) *folgt*: Eine Subjunktion der Form $N\alpha \wedge M\beta \supset M\gamma$ ist in keinem unserer Systeme der modalen Aussagenlogik gültig. Deshalb ist der Schluß von der Prämissenmenge $\{N\alpha, M\beta\}$ auf die Konklusion $M\gamma$ nicht korrekt. Dieses Ergebnis ist aber kontraintuitiv. Die folgende informelle Argumentation zeigt nämlich, daß die Aussage (iii) doch aus den beiden Aussagen (i) und (ii) erschlossen werden kann: Wegen (ii) ist eine Situation j (eine Welt) möglich, in der alle Pferde schlafen. Wegen (i) gilt in dieser Situation (wie in jeder anderen möglichen Situation auch), daß alle Schimmel Pferde sind. Also folgt, daß in der Situation (möglichen Welt) j alle Schimmel schlafen. (Für die Situation j folgt dies nach dem Aristotelischen Syllogismus „Barbara".) Demnach ist es möglich, daß alle Schimmel schlafen, und damit ist (iii) aus (i) und (ii) erschlossen. Dieser Schluß macht von Mitteln Gebrauch, die die philosophische Aussagenlogik nicht enthält. Die philosophische Prädikatenlogik soll uns diese Mittel nun zur Verfügung stellen.

In Teil I haben wir gesehen, daß das Instrumentarium der philosophischen Aussagenlogik in besonderer Weise geeignet ist, bei der Behandlung philosophischer Probleme eingesetzt zu werden. Dies gilt auch für die Prädikatenlogik. Hier werden wir uns die folgenden Komplexe ansehen: Problem I: Existenzpräsuppositionen; Problem II: Existenz als Prädikat; Problem III: Modalität und Existenz; Problem IV: Modalität de re und Modalität de dicto;

Problem V: Das (Frege)-Paradoxon der Identität; Problem VI: Sokrates' Rätsel der falschen Identitätsurteile; Problem VII: Veränderung und Konstanz.

Die Probleme I - IV werden im Rahmen der alethischen Modallogik erörtert; V und VI werden mit alethischen und mit Mitteln der Glaubenslogik behandelt; Problem VII gehört in die Zeitlogik.

1 Grundzüge der modalen Prädikatenlogik

1.1 Die formale Sprache MPL

Wie in der Aussagen- so entwickeln wir auch in der Prädikatenlogik eine formale Sprache in der Weise, daß wir zunächst ihr Vokabular vorstellen und dann die syntaktischen Regeln formulieren, nach denen die Aussagen (und andere *Formeln*) aus dem Vokabular gebildet werden können.

1.1.1 Das Vokabular der Sprache MPL:

Vokabular

Das Vokabular der Sprache MPL besteht aus logischen Konstanten, aus nicht-logischen (*deskriptiven* oder *inhaltlichen)* Konstanten und aus Variablen.

Logische Konstanten sind:

(i) die schon in der Aussagenlogik benutzten (extensionalen) Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \supset, \equiv$;

(ii) die beiden Quantoren: $\forall, \exists$;

(iii) die (ebenfalls schon bekannten) beiden Modaloperatoren: M, N;

(iv) ein einstelliger Prädikator: E.

Im Unterschied zur elementaren (nicht-modalen) Prädikatenlogik haben wir also unter den logischen Konstanten ein Zeichen „E“, das syntaktisch als ein Prädikator fungiert; wir lesen diesen Prädikator „existiert“: E ist ein Existenzprädikator.

Nicht-logische Konstanten:

(i) Prädikatoren (große lateinische Buchstaben mit Indices):

$P^1, P_1^1, P_2^1, P_3^1, \ldots$

$P^2, P_1^2, P_2^2, P_3^2, \ldots$

....

$Q^1, Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, \ldots$

$Q^2, Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, \ldots$

....

$R^1, \ldots$

$R^2, \ldots$

....

$S^1, \ldots$

$S^2, \ldots$

Wir benutzen also die Buchstaben „P“, „Q“, „R“ und „S“ zur Erzeugung von Prädikatoren. Die unteren Indices dienen nur zur Unterscheidung: P_1^1 ist ein anderer Prädikator als P^1 oder P_2^1. Die oberen Indices geben die Stelligkeit des Prädikators an: S^1 ist ein einstelliger Prädikator, wie z. B. das normalsprachliche Wort „sterblich". P_4^2 ist ein zweistelliger Prädikator, wie etwa das normalsprachliche Wort „kleiner". Wir haben Prädikatoren beliebiger Stelligkeit, in dieser Hinsicht ist unsere Sprache also reicher als die normale, natürliche Sprache.

(ii) Individuenkonstanten (kleine lateinische Buchstaben vom Anfang des Alphabets mit unteren Unterscheidungsindices):

$a, a_1, a_2, \ldots$
$b, b_1, b_2, \ldots$
$c, c_1, \ldots$
$d, \ldots$
$e, \ldots$

Weiter enthält das Vokabular Individuenvariable (kleine lateinische Buchstaben vom Ende des Alphabets mit unteren Unterscheidungsindices):

$x, x_1, x_2, \ldots$
$y, y_1, y_2, \ldots$
$z, z_1, z_2, \ldots$

Schließlich enthält unser Vokabular noch die Klammern (,) als Gliederungszeichen.

1.1.2 Syntaktische Regeln für die Bildung von Formeln und Aussagen:

Syntaktische Regeln zur Bildung von Formeln

(Um diese Regeln formulieren zu können, werden wir uns wieder mit metasprachlichen Variablen auf die Elemente des Vokabulars beziehen. Ferner werden wir den Ausdruck „Individuensymbol" benutzen, um auszudrücken, daß ein Zeichen eine Individuenkonstante *oder* eine Individuenvariable ist): Wir lernen zunächst die Regeln zur Bildung von Formeln kennen.

(i) Atomare Formeln:

a) Ist v ein Individuensymbol, dann ist Ev eine atomare Formel (gelesen: „v existiert").

b) Sind $v_1, \ldots, v_n$ Individuensymbole und ist Φ^n ein n-stelliger Prädikator, dann ist $\Phi^n v_1 \ldots v_n$ eine atomare Formel.

c) Weitere atomare Formeln gibt es nicht.

(ii) Formeln:

a) Jede atomare Formel ist eine Formel.

b) Sind α und β Formeln, dann sind auch $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \supset \beta)$, $(\alpha \equiv \beta)$, $M\alpha$ und $N\alpha$ Formeln.

c) Ist α eine Formel und v eine Individuen*variable*, dann sind $\forall v\alpha$ und $\exists v\alpha$ Formeln (gelesen: „für alle v gilt: α" oder „alles ist α" bzw. „es gibt ein v, für welches gilt: α" oder „einiges ist α").

d) Nur solche Zeichenfolgen, die nach den Regeln a) - c) erzeugt

worden sind, sind Formeln von MPL.
Klammereinsparungen verabreden wir entsprechend Nr. 1.2.3 aus Teil I.

Wir sehen uns einige Beispiele für Formeln an:
(i) Ea, (ii) Ex, (iii) $\exists x Ex$, (iv) $P^2xy \supset NQ^1a$, (v) $\forall x(MP^1x \supset Q^1x)$, (vi) $\forall x(P^1x \supset \exists y P^2xy)$, (vii) NR^2xy, (viii) MR^2ay, (ix) NR^2ab, (x) $\forall x MR^2xy$, (xi) $M\forall x N\exists y R^2xy$.

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben:
(Ü1) Zeigen Sie mit Hilfe der Bildungsregeln, daß die Zeichenfolgen (i) - (xi) Formeln der Sprache MPL sind!
(Ü2) Entscheiden Sie, welche der folgenden Zeichenfolgen Formeln sind und welche nicht: (i) $N\forall xP^1y$, (ii) $P^1a \supset P^1b$, (iii) $\exists yP^2ab$, (iv) MP^2abz, (v) $N\forall xP^1a$!

Formeln und Aussagen

Formeln und Aussagen: In der Aussagenlogik dienen die syntaktischen Formationsregeln zur Bildung von Ausdrücken, die durch die semantische Interpretation der Sprache - durch Gegenüberstellung eines Modells - eo ipso mit einem Wahrheitswert versehen werden. Diese Ausdrücke sind Aussagen, sie - und nur sie - fallen bei semantischer Interpretation in die Unterscheidung des Wahren von dem Falschen. Dies gilt nun nicht für die nach den beschriebenen Regeln erzeugten *Formeln*. In ihnen können ja Individuenvariable vorkommen, und ein solches Vorkommen kann bewirken, daß eine Formel auch nach semantischer Interpretation nicht mit einem Wahrheitswert versehen ist. Dies gilt beispielsweise für die oben aufgeschriebenen Formeln (ii), (iv), (vii), (viii) und (x), es gilt nicht für die anderen dort stehenden Formeln. Wir können das folgendermaßen einsehen: Wenn wir die Formel P^1x semantisch interpretieren, dann - das werden wir alsbald sehen - weisen wir dem einstelligen Prädikator P^1 eine Bedeutung zu, wir beschreiben oder benennen nämlich eine Klasse von Dingen und sagen: P^1x bedeutet bei dieser Interpretation dasselbe wie, daß x ein Element dieser Klasse ist; dabei bleibt aber unbestimmt, auf welche Entität sich die Variable x bezieht, und deshalb erhält die Formel P^1x keinen Wahrheitswert, sie steht nicht für das Wahre oder das
Falsche, ihre Bedeutung ist vielmehr dieselbe wie die des Prädikators P^1. Deshalb ist P^1x keine *Aussage*.
Das Vorkommen einer Individuenvariablen in einer Formel verhindert nicht eo ipso, daß diese auch eine Aussage ist. Wenn wir vor die Formel P^1x einen mit der Variablen x erscheinenden Quantor schreiben, etwa $\forall x$, und so die neue Formel $\forall xP^1x$ erzeugen, dann haben wir, wie man terminologisch sagt,

die Variable *x gebunden*, vorher war sie *frei*. Die Formel $\forall x P^1 x$ lesen wir als „alles ist P¹", oder auch „alle Dinge sind P¹". Wir sehen nun: *Diese* Formel wird wahr oder falsch, sobald dem Prädikator P^1 eine Bedeutung zugewiesen wird. Sie ist eine Aussage, denn in ihr kommt an keiner Stelle eine Variable frei vor, vielmehr kommt die Variable x überall gebunden vor.

Gebundenes und freies Vorkommen von Variablen

Wir wollen das freie bzw. gebundene Vorkommen von Variablen in Formeln hier nicht exakt definieren. Es soll aber an einigen weiteren Beispielen erläutert werden, so daß wir unseren Blick dafür schärfen. Ganz allgemein gilt übrigens dies: Das Vorkommen einer Variablen unmittelbar hinter einem der beiden Quantoren $\forall$, $\exists$ ist *immer gebunden.*

Beispiele: (i) In der Formel $\forall x(P^1x \supset Q^1x) \wedge S^1x$ kommt die Variable x insgesamt viermal vor. Das erste Vorkommnis (gezählt von links) ist unmittelbar hinter einem Quantor, also gebunden. Auch das zweite und dritte Vorkommnis sind gebunden, denn die Quantifizierung $\forall x$ bezieht sich auf diese Stellen. Wir sagen auch: Diese beiden Vorkommnisse liegen *im Bereich* eines Quantors; und es kommt immer darauf an, diesen Bereich richtig einzugrenzen. In unserem Falle endet er bei der Klammer hinter dem dritten Vorkommnis von x. Die Teilformel bis dorthin können wir lesen „für alle x gilt: wenn x ein P¹ ist, dann ist x ein Q¹". Dieser Teil enthält keine Variable frei; er ist eine Aussage. Das vierte Vorkommnis von x ist frei, denn es liegt ja nicht mehr im Bereich der Quantifizierung $\forall x$. Insgesamt handelt es sich bei dieser Formel nicht um eine Aussage. Wir sehen hier auch, daß ein und dieselbe Variable in einer Formel sowohl gebunden als auch frei vorkommen kann. (ii) In der Formel $\forall y(P^1y \supset N\exists xR^2xy)$ kommt keine Variable frei vor. (iii) $M(P^1x \wedge Q^1a) \supset \forall x(NP^1x \supset Q^1y)$. Hier ist das erste Vorkommnis von x frei, alle anderen Vorkommnisse von x sind gebunden, das einzige Vorkommnis von y ist frei. (iv) $\forall xP^1x \supset NQ^1x$. Hier sind nur das erste und das zweite Vorkommnis von x gebunden, denn der Bereich der Quantifizierung $\forall x$ endet mit dem zweiten Vorkommnis von x. Wir lesen die Formel „wenn alles P¹ ist, dann ist x notwendigerweise ein Q¹"; wir dürfen die Formel nicht verwechseln mit (v) $\forall x(P^1x \supset NQ^1x)$, in der x nur gebunden vorkommt. (vi) $\forall x(\forall xP^1x \supset NQ^1x)$. Hier kommt x nur gebunden vor; das einzige in (iv) noch freie Vorkommnis von x wird durch die weitere Quantifizierung (ganz links stehend) gebunden.

Bereich eines Quantors

Wir benutzen nun den soweit erläuterten Begriff des freien Vorkommnisses einer Variablen, um den Begriff der Aussage zu definieren.

1.1.3 Definition („Aussage"):

Eine Formel ohne freie Vorkommnisse von Variablen ist eine *Aussage* der Sprache MPL.

Aussagen der Sprache MPL