FernUniversität in Hagen

Fachbereich Mathematik
Lehrgebiet Algebra / Geometrie
Dr. Manfred Schulte

FernUniversität in Hagen · 58084 Hagen

Informationen
für unsere
Studentinnen
und Studenten

Ihr Zeichen	
Ihre Nachricht vom	
Mein Zeichen	schu 1312X104
Auskunft erteilt	Dr. Schulte
Telefon	02331 987-26 82
Telefax	02331 987-42 69
E-Mail	Manfred.Schulte@fernuni-hagen.de
Hausanschrift	Lützowstr. 125 D – 58084 Hagen
Datum	3. August 2004

Liebe Fernstudentin, lieber Fernstudent,

hiermit begrüße ich Sie als Teilnehmer/in des Kurses **01312 Algebra I**.
Der Kurs ist für das Hauptstudium vorgesehen und setzt Kenntnisse aus den Kursen Lineare Algebra I, II oder Mathematik I voraus. Er besteht aus sieben Kurseinheiten; zu jeder Kurseinheit gehören Einsendeaufgaben, die Sie so intensiv wie möglich bearbeiten sollten. In der folgenden Terminübersicht sind die Rücksendetermine für Ihre Lösungen zusammengestellt:

Kurseinheit	Einsendetermin
1	18.10.04
2	02.11.04
3	15.11.04
4	29.11.04
5	13.12.04
6	10.01.05
7	24.01.05

Zu den Einsendeaufgaben gibt es Lösungsvorschläge, die allerdings nur diejenigen Teilnehmer/innen erhalten, die Aufgaben bearbeitet und eingeschickt haben. Die Lösungsvorschläge werden zusammen mit den korrigierten Einsendeaufgaben zurückgeschickt.

In den Einsendeaufgaben zu jeder Kurseinheit sind 50 Punkte erreichbar. Falls Sie einen Schein über die erfolgreiche Teilnahme am Kurs erhalten möchten, müssen Sie

1. **bei den Einsendeaufgaben 80 Punkte erreichen, davon mindestens 40 Punkte aus den Kurseinheiten 4 – 7, und**
2. **eine Klausur bestehen, die am 12.02.2005 stattfindet.**

Der Schein wird benotet, als Note wird die Klausur-Note genommen. Falls Sie an der Klausur nicht teilnehmen können oder die Klausur nicht bestehen, können Sie eine mündliche Prüfung in Hagen ablegen. (Eine Nachklausur findet *nicht* statt.) Nähere Informationen zur Klausur erhalten Sie in späteren Anschreiben. In der Klausur werden keine Hilfsmittel wie Studienbriefe, Bücher oder eigene Aufzeichnungen zugelassen sein.

Falls Sie Fragen zum Kurs haben, schreiben Sie mir bitte oder rufen Sie mich an:

Dr. Manfred Schulte, E-Mail: Manfred.Schulte@Fernuni-Hagen.de
Telefon-Nr.: 02331/987-26 82, Sprechzeit: Di, Do 9 – 12 Uhr.

Zum Kurs sind zwei Studientage in Hagen geplant. Der erste **Studientag** soll am

Samstag, dem 20. November 2003
Beginn: 9.30 Uhr, Ende ca. 17 Uhr
im **großen Seminarraum** des Fachbereichs Mathematik der FernUniversität
Lützowstr. 125, 58084 Hagen

stattfinden. In Übersichtsvorträgen und durch Bearbeitung von Übungsaufgaben sollen vor allem die ersten drei Kurseinheiten behandelt werden, aber auch Grundbegriffe über Polynome und Körpererweiterungen. In erster Linie sollen die Gebiete behandelt werden, zu denen Sie Fragen haben; das Programm hängt also von Ihren Wünschen ab.

Der Studientag ist ein zusätzliches Angebot an Sie; die Teilnahme ist freiwillig und kostenlos. Falls Sie teilnehmen wollen, schicken Sie bitte das beigefügte Anmeldeformular bis zum

06.11.2004

an mich zurück. Eine Anmeldebestätigung von mir ist nicht vorgesehen.
Der Studientag findet nur statt, falls sich mindestens drei Studenten anmelden.
Falls der Studientag wegen zu geringer Teilnahme ausfällt, werde ich alle Studenten, die sich angemeldet haben, benachrichtigen.
Bei ausreichender Beteiligung ist ein zweiter Studientag am **Samstag, 8. Januar 2005** vorgesehen, auf dem vor allem die Kurseinheiten 4 bis 7 des Kurses behandelt werden sollen.

Der Fachbereich Mathematik befindet sich an der Ecke Feithstraße/Lützowstraße. Bei Anfahrt mit dem Auto fahren Sie von der Sauerlandlinie A 45 an der Abfahrt Hagen auf den Autobahnzubringer Richtung Hagen, dann Abfahrt in Richtung Emst. Vom Hauptbahnhof erreichen Sie den Fachbereich mit den Buslinien 515, 524 oder 547 in Richtung Halden oder Hohenlimburg, Haltestelle Tondernstraße.

Ich wünsche Ihnen bei der Bearbeitung des Kurses viel Erfolg und bitte Sie, sich bei irgendwelchen Unklarheiten an mich zu wenden.

Mit freundlichen Grüßen,
Ihr Kursbetreuer

Anlage(n): Aufgaben zum ersten Studientag,
Anmeldeformular zum ersten Studientag

Algebra I: Aufgaben zum ersten Studientag

Aufgabe 1
Zeigen Sie: In einer Gruppe G sind genau dann alle Untergruppen Normalteiler, wenn zu allen $a, b \in G$ ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $aba^{-1} = b^n$.

Aufgabe 2
Sei G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Zeigen Sie: Sind $|H|$ und $[G : N]$ teilerfremd, so gilt $H \subset N$.

Aufgabe 3
Sei N eine Teilmenge einer Gruppe G. Zeigen Sie:
a) $Z_G(N) := \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in N\}$ ist eine Untergruppe von G.
b) Ist N ein Normalteiler von G, so ist $Z_G(N)$ ein Normalteiler von G, und $G/Z_G(N)$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(N)$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 1001 zyklisch ist.

Aufgabe 5
Sei G eine Gruppe der Ordnung 500.
a) Zeigen Sie: G ist auflösbar.
b) Ist G stets abelsch?

Aufgabe 6
G_1, G_2 seien endliche Gruppen und p eine Primzahl.
a) Zeigen Sie: Ist P_i eine p-Sylow-Gruppe von G_i für $i = 1, 2$, so ist $P_1 \times P_2$ eine p-Sylow-Gruppe von $G_1 \times G_2$.
b) Beschreiben Sie alle p-Sylow-Gruppen von $G_1 \times G_2$ mit Hilfe der p-Sylow-Gruppen von G_1 und G_2.

Aufgabe 7
Zeigen Sie:
a) Für $n \geq 5$ gibt es keinen surjektiven Homomorphismus $S_n \to S_{n-1}$.
b) Es gibt einen surjektiven Homomorphismus $S_4 \to S_3$.
(Hinweis: Nach 1.6.9 ist V_4 Normalteiler von S_4. Zeigen Sie: $S_4/V_4 \cong S_3$.)

Aufgabe 8
Geben Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 400 an.

Aufgabe 9
Zerlegen Sie die folgenden Polynome in irreduzible Faktoren über $\mathbb{Q}$:
a) $X^4 - X^2 + 2X + 2$, b) $3X^3 + 30X^2 - 30X + 20$, c) $X^4 + X^2 + 1$.

Aufgabe 10
Sei I das Ideal $(2, X^3 + X + 1)$ von $\mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie:
a) I ist kein Hauptideal von $\mathbb{Z}[X]$.
b) I ist ein maximales Ideal von $\mathbb{Z}[X]$.
(Hinweis: $\mathbb{Z}[X]/I \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]/(X^3 + X + \overline{1})$.)

Aufgabe 11
Sei K ein Körper und R ein Unterring von K, jedes Element von K sei Nullstelle eines normierten Polynoms aus $R[X]$. Zeigen Sie: R ist ein Körper.
Kann man die Bedingung „normiertes Polynom“ durch „Polynom $\neq 0$“ ersetzen?

Aufgabe 12
Sei L/K eine Körpererweiterung und $[L : K]$ eine Primzahl. Welche Zwischenkörper hat die Erweiterung L/K?

Bitte bis 06.11.2004 zurück an:

Herrn
Dr. Manfred Schulte
Fachbereich Mathematik
Fernuniversität
58084 Hagen

Hiermit melde ich mich zum ersten Studientag zum Kurs

Algebra I am 20.11.2004

in Hagen an.

Name, Vorname:	....
Straße:	....
PLZ, Wohnort:	....
Tel.-Nr.:	....
E-Mail:	....

....	....
Datum	Unterschrift