Teil 1

Kurseinheit 1

Inhalt der Kurseinheit

Bevor es los geht: Studierhinweise und Notationen

Studierhinweise

Der vorliegende Kurs Maß- und Integrationstheorie führt in ein zentrales Gebiet der Analysis ein. Die moderne Maß- und Integrationstheorie ist für zahlreiche Gebiete der reinen Mathematik (z. B. Funktionalanalysis, Differentialgeometrie) und der angewandten Mathematik (insbesondere in Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematischer Statistik) unverzichtbar. Auch für Anwendungen der Mathematik in Physik, Technik oder Wirtschaftswissenschaften spielt die Maß- und Integrationstheorie eine wichtige Rolle. In diesem Kurs tragen wir die – unserer Meinung nach – wichtigsten Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie zusammen, wie sie jeder Mathematiker kennen sollte.

Der vorliegende Kurs 01145 Maß- und Integrationstheorie ist fester Bestandteil des Bachelorstudiengangs „Mathematik“. Vollzeitstudierenden raten wir den Kurs im dritten Semester zu bearbeiten (bei Studienbeginn im Wintersemester) oder im zweiten Semester (bei Studienbeginn im Sommersemester). Bei Teilzeitstudierenden raten wir den Kurs im fünften bzw. vierten Semester zu belegen. Für Studierende andere Studiengänge (wie Diplom oder Master) kann der Kurs eine sinnvolle Ergänzung im Bereich Analysis und/oder Stochastik sein.

Im Lehrtext sind viele Aufgaben von unterschiedlicher Schwierigkeit eingestreut, zu denen Sie Musterlösungen im Anhang des jeweiligen Kapitels finden. Wir empfehlen sehr dringend, dass Sie diese Aufgaben zunächst selbstständig versuchen zu lösen. Konsultieren Sie die Musterlösung erst dann, wenn Sie die Aufgabe selbst gelöst haben oder wirklich nicht mehr weiterkommen. Mathematik lernt man vor allem durch Problemlösen. Neben den Aufgaben im Text dienen dazu insbesondere die Einsendeaufgaben. Zu jeder Kurseinheit erhalten Sie (in der Regel vier)

Einsendeaufgaben, für deren Bearbeitung Sie jeweils zwei Wochen Zeit haben (ab offiziellem Bearbeitungsbeginn der Kurseinheit). Die von Ihnen eingeschickten Lösungen erhalten Sie korrigiert zurück. Die aktive Teilnahme an der Lösung dieser Aufgaben ist nicht einfach *ein zusätzliches* Angebot; es ist vielmehr *die zentrale* Möglichkeit, den Stoff zu erlernen und zu vertiefen. Auch die Klausur zum Abschluss des Kurses wird aus Aufgaben bestehen, die mit Einsendeaufgaben vergleichbar sind.

Als Vorwissen wird für diesen Kurs nur der Kurs 01141 „Mathematische Grundlagen“ vorausgesetzt. Natürlich können Sie dieses Grundwissen auch auf andere Art erworben haben, etwa durch die Kurse Analysis (01134) und Lineare Algebra (01104). An einigen Stellen dieses Kurses benötigen wir Konzepte und Ergebnisse aus der linearen Algebra, wie sie z. B. im Kurs 01143 vermittelt werden. Wenn Sie diesen Kurs *gleichzeitig* belegen, haben Sie diese Kenntnisse dort bereits erworben, bevor Sie im vorliegenden Kurs gebraucht werden.

An einigen Stellen benötigen wir Kenntnisse aus der Analysis, die in den „Mathematischen Grundlagen“ nicht enthalten sind. Diese Begriffe, Resultate und meist auch Beweise sind im vorliegenden Kurs enthalten. Der Kurs Analysis (01144) kann dafür zur Vorbereitung oder Vertiefung dienen, sein Inhalt wird jedoch für den vorliegenden Kurs *nicht* benötigt.

Es gibt eine Anzahl guter Lehrbücher über Maß- und Integrationstheorie. Wir haben uns für diesen Kurs insbesondere an den folgenden Monografien orientiert, die wir dem Leser auch zur Vertiefung und Abrundung des Stoffs empfehlen können:

Heinz Bauer: Maß- und Integrationstheorie
2. Auflage, de Gruyter 1992

und

Jürgen Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie
2. Auflage, Springer 1998 .

Letzteres Buch zitieren wir z. B. im Text gelegentlich als *Elstrodt*.

Auf den Kurs 01141 Mathematische Grundlagen verweisen wir durch Hinweise wie „MG, Kapitel 17“.

An dieser Stelle danken wir der Autorin von MG, Frau Prof. Dr. Unger für wertvolle Starthilfe zum Schreiben des vorliegenden Kurses.

Darüber hinaus empfehlen wir Ihnen Lehrbücher aus der Analysis, z.B.

Martin Barner, Friedrich Flohr, Analysis I und II de Gruyter 2000 und 1989

Otto Forster, Analysis 1-3
Vieweg + Teubner 2008-2009

Walter Rudin, Analysis
Oldenburg 1998

und (in Englisch):

Serge Lang, Real Analysis
Addison-Wesley 1983

Der Kurs Maß- und Integrationstheorie beginnt in Kurseinheit 1 mit einer Wiederholung und Vertiefung des Riemann-Integrals. Sie lernen außerdem Begriffe wie gleichmäßige Stetigkeit und gleichmäßige Konvergenz und das Riemann-Stieltjes-Integral kennen.

Kurseinheit 2 ist verschiedenen Grundlagen gewidmet, die Sie für die folgenden Kurseinheiten brauchen. Es bietet einen Mix aus Mengenlehre, Analysis, Topologie und Funktionalanalysis. Alle nötigen Begriffe werden eingeführt, die meisten Resultate bewiesen.

Kurseinheit 3 und 4 entwickeln die Theorie der Maße. Dabei ist das Volumenmaß in $\mathbb{R}^d$ (Lebesgue-Maß) von beispielgebender Bedeutung, aber auch andere wichtige Maße werden eingeführt und ausführlich diskutiert.

Kurseinheit 5 behandelt die Integrationstheorie, die auf der Maßtheorie aufbaut. Wir definieren das Lebesgue-Integral und seine Verwandten und zeigen insbesondere die wichtigen Konvergenzsätze (Satz von der monotonen Konvergenz, Satz von der majorisierten Konvergenz).

Kurseinheit 6 beschäftigt sich schwerpunktmäßig mit der Integration im $\mathbb{R}^d$.

Die abschließende Kurseinheit 7 gibt einen Überblick über weitere Themen der Maß- und Integrationstheorie und insbesondere einen Ausblick auf wichtige Anwendungsgebiete in Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie.

Wir haben eine Internetseite eingerichtet, in der wir über Korrekturen am Skript, über zusätzliche Hinweise und aktuelle Neuigkeiten informieren. Gerne nehmen wir Vorschläge zu Gestaltung, Veränderung und Ergänzung der Seite entgegen. Wir raten Ihnen dringend, diese Web-Site von Zeit zu Zeit zu besuchen:

`http://www.fernuni-hagen.de/stochastik/kurse/k01145.html`

Noch eine Bitte in eigener Sache: Leider wird dieser Kurs trotz mehrfachem Korrekturlesen Druckfehler und Unstimmigkeiten enthalten. Vielleicht ist auch die eine oder andere Argumentation unverständlich oder fehlerhaft. Möglicherweise wünschen Sie sich einige Themen ausführlicher oder weniger ausführlich behandelt. Bitte teilen Sie uns dies Alles mit. Wir sind bei der Verbesserung des Textes auf Ihre Mitwirkung angewiesen!

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg (und vielleicht auch ein bisschen Spaß) beim Bearbeiten des Kurses.

Mathematische Notationen

$A := B$ bedeutet: „A wird definiert als B“.

$\mathbb{N}$ bezeichnet die natürliche Zahlen: $\{1, 2, \dots\}$, bei $\mathbb{N}_0$ nehmen wir noch die Null dazu, also $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. $\mathbb{Z}$ sind die ganzen Zahlen und $\mathbb{Q}$ sind die rationalen Zahlen, also die Zahlen $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{R}$ bezeichnet die reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Wir nennen eine reelle Zahl x positiv, wenn $x \geq 0$ ist. Wenn wir $x > 0$ meinen, sagen wir x ist strikt positiv.

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x < b\}$

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x < b\}$

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x \leq b\}$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\}$

$\emptyset$ ist die leere Menge $\{\ \}$.

$N \subset M$ bedeutet: N ist eine Teilmenge von M. Das heißt, dass jedes Element von N auch ein Element von M ist. Insbesondere gilt für jede Menge M: $\emptyset \subset M$ und $M \subset M$. $N \subsetneq M$ heißt $N \subset M$, aber $N \neq M$. Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, wenn also $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Mengendifferenzen schreiben wir $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$. Wir schreiben auch $\complement A := M \setminus A$, wenn die Grundmenge M aus dem Zusammenhang klar ist.

Sind f und g Abbildungen mit $f : M \to N$ und $g : N \to K$, dann ist die Abbildung $g \circ f : M \to K$ definiert durch $g \circ f(x) := g\big(f(x)\big)$.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend (oder monoton steigend oder isoton), wenn aus $x < y$ folgt, dass $f(x) \leq f(y)$ gilt und streng monoton wachsend (oder streng monoton steigend oder streng isoton), wenn aus $x < y$ die Aussage $f(x) < f(y)$ folgt. Entsprechend folgt aus $x < y$ für monoton fallende (oder antitone) Funktionen, dass $f(x) \geq f(y)$ ist, und für streng monoton fallende (oder streng antitone) Funktionen, dass $f(x) > f(y)$ gilt.

Sind A und B Aussagen, dann ist die Konjunktion $A \wedge B$ von A und B diejenige Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind. Die Disjunktion $A \vee B$ von A und B ist diejenige Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der Aussagen A oder B wahr sind. Die Aussprache von $A \wedge B$ ist „A und B“ und die von $A \vee B$ ist „A oder B“.

Die Implikation $A \implies B$ von Aussagen A und B bedeutet: Ist A wahr, dann ist B wahr. Sie wird als „aus A folgt B" oder „A impliziert B" ausgesprochen. Insbesondere gilt: Die Implikation $A \implies B$ ist schon dann wahr, wenn die Aussage A falsch ist. „aus Falschem kann man Alles folgern." Analog bezeichnet $A \impliedby B$: Ist B wahr, dann ist A wahr. Sie wird als „aus B folgt A" oder „B impliziert A" ausgesprochen.

Die Äquivalenz $A \iff B$ von Aussagen A und B bedeutet $A \implies B$ und $A \impliedby B$. Sie wird als „A und B sind äquivalent" ausgesprochen. Häufig werden wir in diesem Kurs Äquivalenzen $A \iff B$ dadurch zeigen, dass wir im ersten Teil des Beweises $A \implies B$ zeigen, das deuten wir durch „$\Rightarrow$" am Beginn dieses Beweisteiles an, und dann im zweiten Teil die Implikation $A \impliedby B$ (also $B \implies A$) zeigen, was wir durch ein „$\Leftarrow$" einleiten.

Eine Aussage „es gibt ein x" wird mit Hilfe vom Existenzquantor $\exists$ ausgedrückt: $\exists_x$. Die Aussage $\exists_{x \in M} A(x)$ bedeutet: „Es gibt ein $x \in M$ und für dieses x gilt die Aussage $A(x)$." Der Allquantor $\forall$ wird verbal durch „Für alle" ausgedrückt; $\forall_x$ bedeutet „für alle x". Insbesondere bedeutet $\forall_{x \in M} A(x)$: „Für alle $x \in M$ gilt die Aussage $A(x)$." noch ausführlicher geschrieben: „Für alle x gilt: $x \in M \implies A(x)$."

Sie werden feststellen, dass sich einige Notationen von denen unterscheiden, die Sie z. B. in den „Mathematischen Grundlagen" oder aus anderen Quellen kennen. Dies läßt sich leider nicht verhindern, da Notationen nicht universell und überall identisch sind. Z. B. können sich in verschieden Gebieten der Mathematik unterschiedliche Sprech- und Schreibweisen für das gleiche Objekt etablieren. Wir werden uns möglichsten tun, um alle Notation vor Benutzung zu erklären.

Griechische und andere Buchstaben

Wie in der Mathematik üblich und wohl unvermeidlich benutzen wir Buchstaben des griechischen Alphabets, insbesondere

α	sprich: „alpha“,	das griechische „a“
β	sprich: „beta“,	das griechische „b“
γ	sprich: „gamma“,	das griechische „g“
δ	sprich: „delta“,	das griechische „d“
Δ	sprich: „Delta“,	das griechische „D“
ε	sprich: „epsilon“,	das griechische „e“
λ	sprich: „lambda“,	das griechische „l“
Λ	sprich: „Lambda“,	das griechische „L“
μ	sprich: „mü“,	das griechische „m“
ν	sprich: „nü“,	das griechische „n“
χ	sprich: „chi“,	das griechische „ch“
ω	sprich: „omega“,	das griechische (lange) „o“
Ω	sprich: „Omega“,	das griechische (lange) „O“

Darüber hinaus benutzen wir „Schönschrift-Buchstaben“, wie $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathfrak{I}$, die man (z. B.) „Skript-A“, „Skript-C“, „Skript-I“ usw. spricht.

Kapitel 1

Das Riemann-Integral

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem „Riemann-Integral“, das Sie aus dem Kurs „Mathematische Grundlagen“ – und vielleicht auch aus der Schule – kennen.
Wir werden zunächst die Definition wiederholen und an einige wichtige Eigenschaften erinnern, andere neu beweisen.
Zur Vorbereitung auf dieses Kapitel empfehlen wir Ihnen, sich noch einmal den Inhalt des Kapitels 19 (aus Kurseinheit 7) des Kurses „Mathematische Grundlagen“ ins Gedächtnis zu rufen. Sie werden außerdem die Begriffe „Grenzwerte von Folgen“ (Kapitel 12) und „Stetigkeit“ sowie „Grenzwerte von Funktionen“ (Kapitel 14) aus diesem Kurs brauchen. Im Folgenden kürzen wir den Kurs „Mathematische Grundlagen“ als „MG“ ab. Ein Zitat wie „MG 14.3.4“ zum Beispiel weist hin auf die Definition der Konvergenz einer Funktion im Kapitel 14 Abschnitt 3 des Kurses Mathematische Grundlagen.

1.1 Definition und elementare Eigenschaften

1.1.1 Vereinbarung: Im Folgenden sind a und b reelle Zahlen, für die $a < b$ gilt.

1.1.2 Definition: Eine **Partition** des Intervalls $[a, b]$ ist eine Folge P von endlich vielen reellen Zahlen $t_0, t_1, \ldots, t_n$ für die gilt:

(1) $t_0 = a\,,\ t_n = b$,

(2) $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$.

Die Zahlen $t_0, \ldots, t_n$ heißen die **Stützpunkte** von P, wir schreiben die Partition P auch als $P = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$. Die Menge aller Partitionen von $[a, b]$ bezeichnen wir mit $Z([a, b])$.

1.1.3 Beispiel: Zu $a < b$ und $n \in \mathbb{N}$ wird durch $t_k := a + k\,\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, \ldots, n$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$ erklärt. Weil für *diese* Partition die Abstände $t_k - t_{k-1}$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gleich sind (nämlich gleich $\frac{b-a}{n}$), sprechen wir auch von einer Partition mit **äquidistanten Stützpunkten** oder auch von einer äquidistanten Partition.

1.1.4 Definition: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $P = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ eine Partition von $[a, b]$, dann setzen wir für $i = 1, \ldots, n$:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\} \tag{1.1}$$

und

$$M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \le x \le t_i\}. \tag{1.2}$$

Dann definieren wir die **Untersumme** $\mathcal{U}(f, P)$ als

$$\mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \tag{1.3}$$

und die **Obersumme** $\mathcal{O}(f, P)$ als

$$\mathcal{O}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}). \tag{1.4}$$

1.1.5 Bemerkung: Nur wenn f beschränkt ist, sind alle m_i und alle M_i definiert! Deshalb haben wir in Definition 1.1.4 die Beschränktheit von f gefordert.

1.1.6 Definition: Ist $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann heißt f **Riemann-integrierbar**, wenn gilt:

$$\sup\{\mathcal{U}(f, P) \mid P \in Z([a, b])\} = \inf\{\mathcal{O}(f, P) \mid P \in Z([a, b])\}.$$

Ist f Riemann-integrierbar, dann heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{\mathcal{U}(f,P) \mid P \in Z([a,b])\} \quad (= \inf\{\,\mathcal{O}(f,P) \mid P \in Z([a,b])\})$$

das **Riemann-Integral** von f (von a bis b oder auf $[a,b]$).

1.1.7 Bemerkung: Im Kurs MG werden Riemann-integrierbare Funktionen einfach „integrierbar" genannt. Wir werden in diesem Kurs allgemeinere Integrierbarkeitskonzepte betrachten. Zur Unterscheidung fügen wir hier die Vorsilben „Riemann" an.

Ist eine Funktion f auf der Menge $M \subset \mathbb{R}$ definiert und $[a,b] \subset M$, dann sagen wir, dass f auf $[a,b]$ Riemann-intergrierbar ist, wenn die Einschränkung von f auf das Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist.

1.1.8 Definition: Für $b < a$ definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{1.5}$$

falls f über $[b,a]$ Riemann-integrierbar ist.

Außerdem setzen wir

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Im Kurs MG wurde bereits die folgende Formulierung für die Riemann-Integrierbarkeit bewiesen:

1.1.9 Proposition: Ist $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P von $[a,b]$ gibt, so dass $\mathcal{O}(f,P) - \mathcal{U}(f,P) < \varepsilon$ ist.

Aus dem Kurs MG kennen wir bereits die folgenden Sätze (MG 19.1.16, 19.1.11):

1.1.10 Satz: Sind die Funktionen f und g auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \tag{1.7}$$

auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b h(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.8}$$

1.1.11 Satz: Sei $a < c < b$. Ist die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,c]$ und auf $[c,b]$ Riemann-integrierbar, dann ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.9}$$

Wir beweisen den folgenden Satz, der die Monotonie des Integrals ausdrückt.

1.1.12 Satz: Sind f und g auf $[a,b]$ Riemann-integrierbare Funktionen und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.10}$$

Beweis: Da $f(x) \leq g(x)$ gilt, folgt für jede Partition $P \in Z([a,b])$:

$$\mathcal{U}(f,P) \leq \mathcal{U}(g,P)$$

(und $\mathcal{O}(f,P) \leq \mathcal{O}(g,P)$). Also gilt auch

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &= \sup_{P \in Z([a,b])} \mathcal{U}(f,P) \\
&\leq \sup_{P \in Z([a,b])} \mathcal{U}(g,P) \\
&= \int_a^b g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

□

1.1.13 Korollar: (a) Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(b) Ist f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ mit Zahlen $m, M \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$m\,(b-a) \;\leq\; \int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; M\,(b-a).$$

Beweis:

(a) Ergibt sich aus b) mit $m = 0$.

(b) Es sei $h(x) = m$ für alle $x \in [a, b]$. h ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ mit

$$\int_a^b h(x)\,dx = m(b-a).$$

Es gilt

$$h(x) \le f(x).$$

Also ist nach Satz 1.1.12

$$m(b-a) = \int\limits_a^b h(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Die obere Schranke zeigt man analog. □

1.1.14 Satz: Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und ist f auf allen Intervallen $[c, d] \subset (a, b)$ Riemann-integrierbar, dann ist f auch auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Beweis: Da f beschränkt ist, gibt es ein $C > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ gilt: $|f(x) - f(y)| \le C$.

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $c, d \in [a, b]$ so, dass $a < c < d < b$ ist und $c - a < \frac{\varepsilon}{4\,C}$ sowie $b - d < \frac{\varepsilon}{4\,C}$ gelten.

Nach Voraussetzung ist f auf $[c, d]$ Riemann-integrierbar, also gibt es (nach Proposition 1.1.9) eine Partition $P' = \langle t_0, \ldots, t_n\rangle$ von $[c, d]$ mit

$$\mathcal{O}(f, P') - \mathcal{U}(f, P') < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wir setzten $m = \inf\limits_{x\in[a,c]} f(x)$ und $M = \sup\limits_{x\in[a,c]} f(x)$ sowie $\widetilde{m} = \inf\limits_{x\in[d,b]} f(x)$ und $\widetilde{M} = \sup\limits_{x\in[d,b]} f(x)$.

Durch Hinzunahme der Stützstellen a und b zur Partition $P' = \langle t_0, \ldots, t_n\rangle$ entsteht die Partition $P = \langle a, t_0, \ldots, t_n, b\rangle$ von $[a, b]$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}(f, P) - \mathcal{U}(f, P)\\
&= (M - m)\,(c - a) \;+\; \mathcal{O}(f, P') - \mathcal{U}(f, P') \;+ (\widetilde{M} - \widetilde{m})\,(b - d)
\end{aligned}$$

$$\leq C\,\frac{\varepsilon}{4\,C} + \frac{\varepsilon}{4} + C\,\frac{\varepsilon}{4\,C}$$
$$< \varepsilon.$$

□

Wir beweisen nun, dass „viele“ Funktionen Riemann-integrierbar sind. Wir beginnen mit:

1.1.15 Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$.

> **Notation:** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **monoton steigend**, wenn aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) \leq f(y)$ folgt, und **streng monoton steigend**, wenn aus $x < y$ die Ungleichung $f(x) < f(y)$ folgt. Sie heißt **monoton fallend**, wenn aus $x < y$ $f(x) \geq f(y)$ folgt, und **streng monoton fallend**, wenn aus $x < y$ $f(x) > f(y)$ folgt.
> Eine Funktion f heißt **monoton**, wenn sie monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beweis: Wir führen den Beweis für eine monoton *steigende* Funktion f, für monoton fallendes f ist der Beweis analog.
Ist $P = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle$ eine Partition von $[a, b]$, dann gilt wegen der Monotonie von f:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = f(t_{i-1})$$

und

$$M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = f(t_i).$$

Daher gilt

$$\mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$$

und

$$\mathcal{O}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Deshalb gilt:

$$\mathcal{O}(f, P) - \mathcal{U}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}).$$

Wir wählen jetzt $\varepsilon > 0$ und eine Partition $P = \langle t_0, \dots, t_n \rangle$ mit

$$\delta(P) = \max_{i=1,\dots,n} (t_i - t_{i-1}) < \delta. \tag{1.11}$$

wobei $\delta > 0$ ist. Der genaue Wert von δ wird später in Abhängigkeit von ε gewählt. Für eine solche Partition gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(f,P) - \mathcal{U}(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) \Big) (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) \Big)\, \delta \\ &= \delta \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) \Big). \end{aligned}$$

Die Summe $\sum\limits_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) \Big)$ ist eine „Teleskop-Summe“, d. h.:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) \Big) &= \Big(f(t_1) - f(t_0) \Big) + \Big(f(t_2) - f(t_1) \Big) \\ &\quad + \Big(f(t_3) - f(t_2) \Big) + \dots \\ &\quad + \Big(f(t_{n-1}) - f(t_{n-2}) \Big) + \Big(f(t_n) - f(t_{n-1}) \Big). \end{aligned} \tag{1.12}$$

In dieser Summe fallen fast alle Terme weg, weil sie einmal mit „+“ und einmal mit „−“ vorkommen. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) \Big) &= f(t_n) - f(t_0) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\mathcal{O}(f,P) - \mathcal{U}(f,P) \leq \Big(f(b) - f(a) \Big)\, \delta.$$

Wenn wir also (siehe (1.11)) $\delta(P) < \delta$ so klein machen, dass $\Big(f(b) - f(a) \Big)\, \delta < \varepsilon$ ist, dann gilt

$$\mathcal{O}(f,P) - \mathcal{U}(f,P) < \varepsilon.$$

Also ist f nach Proposition 1.1.9 Riemann-integrierbar. □

Studierhinweis: *Den Satz 1.1.16 haben Sie bereits als Korollar zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im Kurs MG kennengelernt. Hier geben wir einen anderen, etwas direkteren Beweis. Für diesen Beweis benötigen wir den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit, der auch in anderen Zusammenhängen sehr wichtig ist.*
Wenn Sie den Kurs „Analysis“ bearbeitet haben, dann sollten Sie den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit bereits kennen. Für alle, die diesen Begriff nicht (oder nicht mehr) kennen, gibt es den Anhang „Gleichmäßige Stetigkeit“ in diesem Kapitel. Dort wird der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit eingeführt und erläutert. Insbesondere wird dort bewiesen, dass jede auf $[a, b]$ *stetige Funktion dort sogar gleichmäßig stetig ist.*

Wir wenden uns nun dem folgenden wichtigen Satz zu:

1.1.16 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Im Beweis von Satz 1.1.16 benötigen wir folgendes Resultat:

1.1.17 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ folgt, dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gilt.

1.1.18 Bemerkung: Dieser Satz besagt, dass zu $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ *unabhängig* von x (bzw. y) gewählt werden kann.

Den Beweis von Satz 1.1.17 finden Sie im Anhang zu diesem Abschnitt oder im Kurs „Analysis“.

Beweis von Satz 1.1.16:
Zunächst ist die Funktion f wegen MG 14.2.8 beschränkt. Wir setzen zu $n \in \mathbb{N}$:

$$t_k^{(n)} = a + k\frac{b-a}{n}. \tag{1.13}$$

Dann ist

$$P_n = \langle t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)} \rangle$$

eine Partition von $[a, b]$ und es gilt $t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)} = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, \ldots, n$. Da die Funktion f nach Voraussetzung auf $[a, b]$ stetig ist, gibt es nach Satz 1.1.17 zu jedem $\varepsilon > 0$

ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{falls } |x - y| < 2\,\frac{b-a}{n}$$

gilt ($x, y \in [a, b]$).

Wir untersuchen nun die Ober- und Untersumme zur Partition P_n:

$$\mathcal{O}(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \,\frac{b-a}{n},$$
$$\mathcal{U}(f, P_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k \,\frac{b-a}{n}.$$

Dabei ist – wie üblich –

$$M_k = \sup_{t_{k-1} \le x \le t_k} f(x), \qquad m_k = \inf_{t_{k-1} \le x \le t_k} f(x). \tag{1.14}$$

Für $x, y \in [t_{k-1}, t_k]$ gilt $|x - y| \le \frac{b-a}{n} < 2\,\frac{b-a}{n}$. Für n groß genug ist also (für $x, y \in [t_{k-1}, t_k]$)

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

und daher auch

$$|M_k - m_k| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(f, P_n) - \mathcal{U}(f, P_n) \;&\le\; \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \\
&\le\; \frac{b-a}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\
&=\; \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Nach Proposition 1.1.9 ist daher f integrierbar. □

Satz 1.1.16 lässt sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern. Hier folgt eine wichtige Verallgemeinerung:

1.1.19 Satz: Ist die Funktion f auf $[a, b]$ beschränkt und gilt für eine endliche Menge M, dass f auf der Menge $[a, b] \setminus M$ stetig ist, dann ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

1.1.20 Aufgabe: Beweisen Sie Satz 1.1.19!

1.1.21 Satz: Ist f stetig auf $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ und gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0,$$

dann folgt

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b].$$

Beweis: Angenommen $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Dann muss wegen der Stetigkeit von f gelten, dass es für $\varepsilon = \frac{1}{2}\,f(x_0) > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ (und $x \in [a,b]$). Dies impliziert

$$f(x) \geq \frac{1}{2}\,f(x_0) \tag{1.15}$$

für alle $|x - x_0| < \delta$ (und $x \in [a,b]$). Es gibt also ein Intervall $[c,d] \subset [a,b]$, $(c < d)$, so dass $f(x)$ die Ungleichung (1.15) für alle $x \in [c,d]$ erfüllt. Also folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\geq \int_c^d f(x)\,dx \\ &\geq \int_c^d \frac{1}{2}\,f(x_0)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\,f(x_0)(d-c) > 0\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Also war die Annahme, dass $f(x_0) > 0$ ist, falsch. □

1.1.22 Beispiel: Für $f(x) = \sin x$ gilt $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$, aber offenbar ist $f(x)$ nicht für alle $x \in [-1,1]$ gleich Null. Das ist kein Widerspruch zu Satz 1.1.21, weil $f(x) = \sin x$ in $[-1,1]$ *nicht* größer oder gleich Null ist.

1.1.23 Aufgabe: Wo haben wir die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ im Beweis von Satz 1.1.21 eigentlich verwendet?

1.1.24 Satz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt für alle $[c,d] \subset [a,b]$

$$\int_c^d f(x)\,dx = 0,$$

dann gilt:

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b]\,.$$

Beweis: Angenommen $f(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$. Wir dürfen annehmen, dass $f(x_0) > 0$. (Der Beweis ist für $f(x_0) < 0$ völlig analog.)

Wegen der Stetigkeit von f gibt es (wie im vorigen Beweis) ein Intervall $[c,d] \subset [a,b]$ mit $c < d$, so dass

$$f(x) \geq \frac{1}{2}\,f(x_0) > 0$$

für alle $x \in [c,d]$ gilt. Also gilt auch

$$\int_c^d f(x) \geq \frac{1}{2}\,f(x_0)\,(d-c) > 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Die Aussage der Sätze 1.1.21 und 1.1.24 sind falsch, wenn man die Stetigkeit von f nicht voraussetzt. Sei dazu

1.1.25 Definition: Ist $A \subset \mathbb{R}$, dann definiert

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.16}$$

die **charakteristische Funktion** $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Menge A.

Dann gilt:

1.1.26 Proposition: $\displaystyle\int_a^b \chi_{\{0\}}(x)\,dx = 0$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}\,,\ a < b$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Untersuchung von Ober- und Untersummen und zeigen damit auch die Riemann-Integrierbarkeit. Wir wählen ein

Intervall $[a,b]$ mit $a<b$ und $0\in[a,b]$.
(Ist $0\notin[a,b]$, dann ist $\chi_{\{0\}}(x)=0$ in $[a,b]$ und damit die Behauptung trivial.)
Ist $P=\langle t_0,\ldots,t_n\rangle$ eine Partition von $[a,b]$, dann gilt, dass $\mathcal{U}(\chi_{\{0\}},P)\geq 0$.
Wir wählen nun P so, dass

$$\delta(P)=\max_{i=1,\ldots,n}(t_i-t_{i-1})<\delta$$

ist. Dann folgt

$$\mathcal{O}(\chi_{\{0\}},P)\leq\delta\,,$$

also ist $\inf\mathcal{O}(\chi_{\{0\}},P)=0=\sup\mathcal{U}(\chi_{\{0\}},P)\Rightarrow\chi_{\{0\}}$ ist Riemann-integrierbar und $\int\limits_a^b\chi_{\{0\}}(x)\,dx=0$. □

Leider gibt es auch „harmlos wirkende“ Funktionen, die *nicht* Riemann-integrierbar sind. Im Folgenden werden wir dazu ein Beispiel kennenlernen.

1.1.27 Definition: Für $D=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ heißt die Funktion χ_D die **Dirichletfunktion**.

1.1.28 Bemerkung: Es gilt also

$$\chi_D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\tag{1.17}$$

1.1.29 Satz: Die Dirichletfunktion $\chi_D:[0,1]\to\mathbb{R}$ gegeben in (1.17) ist nicht Riemann-integrierbar.

Beweis: In jedem Intervall $[s,t]\subset[0,1]$ mit $s<t$ liegen sowohl rationale Zahlen als auch irrationale, d. h. $[s,t]\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ und $[s,t]\cap\Big([0,1]\setminus\mathbb{Q}\Big)\neq\emptyset$. Ist also $P=\langle t_0,t_1,\ldots,t_n\rangle$ eine Partition von $[0,1]$, dann gilt:

$$m_k=\inf\{\chi_D(x)\mid t_{k-1}\leq x\leq t_k\}=0$$

und

$$M_k=\sup\{\chi_D(x)\mid t_{k-1}\leq x\leq t_k\}=1.$$

Also gilt $\mathcal{U}(\chi_D,P)=0$ und $\mathcal{O}(\chi_D,P)=1$ für jede Partiton P von $[0,1]$, folglich ist χ_D nicht Riemann-integrierbar. □

1.1 A Anhang: Gleichmäßige Stetigkeit.

In diesem Anhang führen wir den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit ein. Der Anhang ist gedacht für alle, die diesen Begriff noch nicht kennen oder ihn wiederholen wollen.

1.1.30 Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** in M, wenn f in jedem Punkt $x \in M$ **stetig** ist, d. h. zu jedem $x \in M$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (das von ε und x abhängen darf), so dass gilt:
Aus $y \in M$ und $|y - x| < \delta$ folgt $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

1.1.31 Beispiele:

1. Die Funktion $f :\ (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist in $(0,1)$ stetig.
2. Die Funktion $g :\ (0,1) \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{x}$ ist in $(0,1)$ stetig.

Wir beweisen die Stetigkeit von f (aus 1.1.31 Beispiel 1): Wir rechnen

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |y^2 - x^2| \\ &= |y + x| \cdot |y - x| \\ &\leq 2|y - x| \qquad (\text{weil } x, y \in\ (0,1)). \end{aligned}$$

Ist also $\varepsilon > 0$, dann wählen wir

$$\delta = \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{1.18}$$

Ist $|y - x| < \delta$, dann ist

$$|f(y) - f(x)| \leq 2|y - x| < \varepsilon.$$

Beachten Sie, dass wir δ unabhängig von x wählen konnten!

Für das Beispiel 2 in 1.1.31 zeigen wir die Stetigkeit folgendermaßen: Für $x, y > 0$ ist

$$|g(y) - g(x)| = \left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x - y|}{xy}.$$

Ist also $\varepsilon > 0$, dann ist $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ falls $|x - y| < \varepsilon xy$. Wählen wir

$$\delta = \min\left(\varepsilon\frac{x^2}{2}\,,\ \frac{x}{2}\right), \tag{1.19}$$

dann folgt aus $|x-y|<\delta$ zunächst

$$\begin{aligned} y &= x-(x-y) \\ &\geq x-|x-y| \\ &> x-\delta \\ &\geq x-\frac{x}{2} \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned} |g(y)-g(x)| &= \frac{|x-y|}{xy} \\ &< \frac{\delta}{x\frac{x}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass δ nicht nur von ε sondern auch von x abhängt. Insbesondere muss (unser) δ immer kleiner gewählt werden, wenn x klein wird.

1.1.32 Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig auf** M, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (das von ε, aber *nicht von* x abhängen darf), so dass für alle $x \in M$ gilt: Ist $y \in M$ und $|y-x| < \delta$ dann gilt $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$.

1.1.33 Beispiele:

1. $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. f ist gleichmäßig stetig auf $(0,1)$.
   Das haben wir gerade bewiesen, denn die Wahl von δ in (1.18) war unabhängig von $x \in (0,1)$.
2. $g: (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. g ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1)$.
   Unsere Wahl von δ in (1.19) hing (stark) von x ab. Es könnte natürlich sein, dass es eine clevere Wahl von δ gibt, die unabhängig von x ist. Dies ist jedoch nicht der Fall. Angenommen, wir hätten zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gefunden, so dass: Aus $|y-x| < \delta$ folgt $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in (0,1)$.
   Wir wählen $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{2n}$, dann ist $|y-x| = \frac{1}{2n} < \delta$ falls n groß genug ist.
   Aber $|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = n > \varepsilon$ für große n. Dies ist ein Widerspruch.

1.1.34 Aufgabe: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2. \tag{1.20}$$

Ist f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

In unserem Beispiel 2 in 1.1.31 machte der linke Rand von $(0, 1)$ die gleichmäßige Stetigkeit „kaputt“. Die Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ ist für alle $x > 0$ stetig, aber die Stetigkeit wird für kleine x „immer schlechter“, d. h. für festes $\varepsilon > 0$ musste $\delta(\varepsilon, x)$ immer kleiner gewählt werden, wenn x kleiner wird.
Mit anderen Worten: Die Funktion $g(x) = \frac{1}{x}$ wird immer steiler, wenn x gegen Null geht.

Der folgende zentrale Satz zeigt, dass Hindernisse für die Gleichmäßigkeit der Stetigkeit nur vom Rand kommen können:

1.1.35 Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

1.1.36 Bemerkungen:

1. Es ist entscheidend, dass das Intervall $[a, b]$ **abgeschlossen** ist. Wir haben bereits gesehen (Beispiel 2 in 1.1.31), dass der Satz für offene Intervalle nicht gilt.
2. Weiterhin ist entscheidend, dass das Intervall $[a, b]$ **beschränkt** ist. Wir haben gesehen (Aufgabe 1.1.34), dass der Satz auf $\mathbb{R}$ ebenfalls nicht gilt.
3. Im Satz kann dass Intervall durch eine beliebig **abgeschlossene** und **beschränkte** Menge M ersetzt werden. Tatsächlich gilt der folgende Beweis auch für diesen Fall. (Siehe auch Kapitel 2.)
4. Satz 1.1.17 folgt direkt aus Satz 1.1.35 und Definition 1.1.32.

Beweis (Satz 1.1.35): Wir führen einen Widerspruchsbeweis.
Angenommen, die Funktion f ist nicht gleichmäßig stetig.
Es ist also FALSCH, dass zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $x, y \in [a, b]$ gilt:

$$|y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

Das heißt: (durch Negation von Quantoren)
Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass zu jedem $\delta > 0 \quad x, y \in [a, b]$ existieren mit

$$|y - x| < \delta\,, \quad \text{aber} \quad |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\,.$$

Sei ein solches $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Wir können dann $\delta = \frac{1}{n}$ wählen und $x_n, y_n \in [a,b]$ mit

$$|y_n - x_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad |f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon\,. \tag{1.21}$$

x_n ist eine Folge mit Werten in $[a,b]$. Weil $[a,b]$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge x_{n_j} von x_n, die konvergiert, etwa $x_{n_j} \to x_0$. Weil $[a,b]$ abgeschlossen ist, gehört x_0, der Limes von x_{n_j} zu $[a,b]$. Die Folge y_{n_j} konvergiert ebenfalls gegen x_0, denn

$$|y_{n_j} - x_0| \;\leq\; |y_{n_j} - x_{n_j}| + |x_{n_j} - x_0| \;\leq\; \frac{1}{n_j} + |x_{n_j} - x_0| \to 0\,.$$

Nach Voraussetzung ist f in $[a,b]$ stetig, also insbesondere stetig in $x_0 \in [a,b]$. Da die Folgen x_{n_j} und y_{n_j} gegen x_0 konvergieren, folgt aus der Stetigkeit von f, dass

$$f(x_{n_j}) \to f(x_0) \quad \text{und} \quad f(y_{n_j}) \to f(x_0)$$

gilt.

Ist also n_j groß genug, dann gilt

$$|f(x_{n_j}) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{und} \qquad |f(y_{n_j} - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Aber dann würde folgen

$$\begin{aligned} |f(x_{n_j}) - f(x_{n_j})| &= |\Big(f(y_{n_j}) - f(x_0)\Big) + \Big(f(x_0) - f(y_{n_j})\Big)| \\ &\leq |\Big(f(y_{n_j}) - f(x_0)\Big) + \Big(f(x_0) - f(y_{n_j})\Big)| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

und dies steht im Widerspruch zu (1.21). $\square$

1.2 Integrationsmethoden und Beispiele

In diesem Abschnitt wiederholen wir die wichtigsten Integrationstechniken (aus MG 19.2) und berechnen einige Beispiel-Integrale.

1.2.1 Definition: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann heißt die Funktion

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \le x \le b) \tag{1.22}$$

das **unbestimmte Integral** von f.
Die Funktion $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, wenn gilt $G'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, wobei G' die Ableitung von G bezeichnet.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung schlägt eine wichtige Brücke zwischen Integral und Ableitung (= Differential). Er stellt darüber hinaus die wichtigste Integrationstechnik überhaupt dar.

1.2.2 Satz: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar und $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ sei das unbestimmte Integral von f.

1) Ist f stetig in $c \in [a, b]$, dann ist F in c differenzierbar und es gilt: $F'(c) = f(c)$. Insbesondere: Ist f stetig in $[a, b]$, dann ist das unbestimmte Integral von f eine Stammfunktion von f.

2) Ist G eine (beliebige) Stammfunktion von f, dann gilt: $F(x) = G(x) - G(a)$, insbesondere gilt $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

1.2.3 Bemerkung: Teil 1) von Satz 1.2.2 heißt auch häufig der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil 2) heißt entsprechend der zweite Hauptsatz (der Differential- und Integralrechnung).

Durch geschicktes „Erraten“ von Stammfunktionen kann man also Integrale ausrechnen.

1.2.4 Beispiele:

1. $f(x) = e^{ax}$ $(a \neq 0)$ hat die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{a}\,e^{ax}$.
2. $f(x) = x\,e^{ax^2}$ hat die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{2a}\,e^{ax^2}$.

3. Die Stammfunktion von $f(x) = e^{-x^2}$ ist nicht mittels elementarer Funktionen darstellbar.

Kennt man die Ableitungen aller „wichtigen“ Funktionen (wie x^n, $\sin x$, e^x etc.), dann kann man auch die Ableitungen von „Kombinationen“ solcher Funktionen (wie $(\sin\sqrt{x})^n$, $e^{x^2 \sin x}$ etc.) ausrechnen.
Beim Integral ist dies *nicht* der Fall. Auch wenn man das Integral von x^2 und e^x berechnen kann, gelingt das mit e^{x^2} nicht explizit. Das Hauptproblem besteht darin, dass es keine Regel gibt, wie das Integral eines Produktes aus den Integralen der Faktoren berechnet werden kann.
Aus diesem Grunde sagt man auch, Differenzieren sei ein Handwerk, Integrieren eine Kunst.

1.2.5 Tabelle: Stammfunktionen (Tabelle aus dem Kurs MG)

Funktion	Definitionsbereich	Stammfunktion
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}_0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x \mapsto x^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x \mapsto x^{-1}$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \log(x)$
$x \mapsto x^{-1}$	$(-\infty, 0)$	$x \mapsto \log(-x)$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$	$(0, \infty)$	$x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \arctan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$	$x \mapsto \arcsin(x)$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{\log(a)}a^x$
$x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$
$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\Big((k-\frac{1}{2})\pi, (k+\frac{1}{2})\pi\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \tan(x)$
$x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$	$\Big(k\pi, (k+1)\pi\Big)$, $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto -\cot(x)$

Aus dem Hauptsatz und aus Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) ergeben sich die folgenden wichtigen Sätze:

1.2.6 Satz: (Partielle Integration)
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) \;-\; f(a)g(a) \;-\; \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Wir nennen $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, wenn h in $[a,b]$ differenzierbar ist und die Ableitung h' eine stetige Funktion auf $[a,b]$ ist.
Die Schreibweise $h(x)\Big|_a^b$ ist eine Kurzform für

$$h(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

1.2.7 Satz: (Substitutionsregel)
Ist $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_a^b f\Big(g(x)\Big)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du\,. \tag{1.23}$$

Die Beweise zu den Sätzen 1.2.2, 1.2.6 und 1.2.7 finden Sie im Kurs MG Abschnitt 19.2.

Wir werden jetzt an einigen Beispielen diese Integrationstechniken einüben. Wir beginnen mit Funktionen der Gestalt $f(x) = \frac{1}{P(x)}$ wobei P ein Polynom erster oder zweiter Ordnung ist.

Eine Funktion P der Gestalt

$$P(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

mit $a_j \in \mathbb{R}$, heißt ein **Polynom**. Der Grad des Polynoms ist der größte Index j, für den $a_j \neq 0$ ist.

Sind $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome und sind $\{x_1, \ldots, x_p\}$ die Nullstellen von P, dann heißt die Funktion $R : \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_p\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$$

eine **rationale** Funktion.

Es gibt eine Methode, mit der sich Integrale von rationalen Funktionen explizit berechnen lassen, wenn man alle (reellen und komplexen) Nullstellen des Nenners $P(x)$ angeben kann. Diese Methode finden Sie in vielen Analysisbüchern unter dem Stichwort „Partialbruchzerlegung“. Im Folgenden beschränken wir uns auf rationale Funktionen der Gestalt $\frac{1}{P(x)}$, mit Polynomen P vom Grade eins oder zwei.

1.2.8 Beispiel: Sei

$$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta} \qquad \text{mit } \alpha, \beta \neq 0. \tag{1.24}$$

f ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\beta}{\alpha}\right\}$ wohldefiniert und dort stetig. Ist $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\beta}{\alpha}\right\}$, dann ist f auf $[a, b]$ beschränkt, also ist f dort integrierbar.

Sei also $[a, b]$ ein Intervall mit $-\frac{\beta}{\alpha} < a < b$, dann gilt

$$\int_a^b \frac{1}{\alpha x + \beta}\, dx = \frac{1}{\beta} \int_a^b \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}\, x + 1}\, dx = \frac{1}{\alpha} \int_{\frac{\alpha}{\beta} a}^{\frac{\alpha}{\beta} b} \frac{1}{y + 1}\, dy\,.$$

(Wir haben die Substitution $y = \frac{\alpha}{\beta}\, x$ angewandt).

Es bleibt also $\frac{1}{y+1}$ zu integrieren. Wir wissen, dass $g(x) = \log x$ die Ableitung $g'(x) = \frac{1}{x}$ hat (für $x > 0$). Also gilt mit $h(y) = \log(y+1)$, dass $h'(y) = \frac{1}{y+1}$ ist (für $y > -1$).

Also gilt für ein Intervall $[c, d]$ mit $c > -1$

$$\int_c^d \frac{1}{y+1}\, dy = \log(d+1) - \log(c+1) = \log\left(\frac{d+1}{c+1}\right).$$

Folglich ist

$$\int_a^b \frac{1}{\alpha x+\beta}\, dx = \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{\frac{\alpha}{\beta}\, b+1}{\frac{\alpha}{\beta}\, a+1}\right) = \frac{1}{\alpha}\log\left(\frac{\alpha b+\beta}{\alpha a+\beta}\right) \tag{1.25}$$

falls $a > -\frac{\beta}{\alpha}$. Übrigens hätte man auch gleich raten können, dass $f(x) = \log(\alpha x + \beta)$ in diesem Fall eine Stammfunktion ist.

Der Fall $a < b < -\frac{\beta}{\alpha}$ kann analog behandelt werden, wobei wir verwenden, dass $\widetilde{g}(x) = \log|x|$ für alle $x \neq 0$ die Ableitung $\widetilde{g}'(x) = \frac{1}{x}$ hat. Somit folgt $\widetilde{h}(y) = \log|y+1|$, $\widetilde{h}'(y) = \frac{1}{y+1}$ für $y \neq -1$ und

$$\int_a^b \frac{1}{\alpha x+\beta}\, dx = \frac{1}{\alpha}\log\left|\frac{\alpha b+\beta}{\alpha a+\beta}\right| \tag{1.26}$$

für $-\frac{\beta}{\alpha} \notin [a, b]$.

1.2.9 Beispiel: Wir betrachten

$$\int_a^b \frac{1}{P(x)}\, dx$$

für ein Polynom 2. Grades, nämlich

$$P(x) = x^2 + \beta x + \gamma. \tag{1.27}$$

Durch quadratische Ergänzung erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + \beta x + \gamma \\ &= \left(x^2 + \beta x + \frac{\beta^2}{4}\right) + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right) \\ &= \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

Fall a) $D = \gamma - \frac{\beta^2}{4} > 0$:
Dann ist $P(x) \geq D > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist $\frac{1}{P(x)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, stetig und daher auf jedem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma}\, dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + D}\, dx \\
&= \int_{a+\frac{\beta}{2}}^{b+\frac{\beta}{2}} \frac{1}{y^2 + D}\, dy \qquad \left(\text{mit der Substitution } y = x + \frac{\beta}{2}\right) \\
&= \frac{1}{D} \int_{a+\frac{\beta}{2}}^{b+\frac{\beta}{2}} \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{D}}\right)^2 + 1}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{D}} \int_{\frac{a+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}}^{\frac{b+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}} \frac{1}{z^2 + 1}\, dz \qquad \left(\text{mit der Substitution } z = \frac{y}{\sqrt{D}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{D}} \arctan(z)\Big|_{\frac{a+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}}^{\frac{b+\frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\arctan\left(\frac{b + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}\right) - \arctan\left(\frac{a + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$\int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + D}\, dx = \frac{1}{\sqrt{D}} \left(\arctan\left(\frac{b + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}\right) - \arctan\left(\frac{a + \frac{\beta}{2}}{\sqrt{D}}\right)\right) \tag{1.29}$$

für $D > 0$.

Fall b) $D = \gamma - \frac{\beta^2}{4} < 0$:
Dann hat das Polynom $P(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ zwei verschiedene (reelle) Nullstellen, nämlich

$$x_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{-D} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{-D}. \tag{1.30}$$

Dann ist also $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ und wir haben

$$\int_a^b \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx \tag{1.31}$$

zu berechnen, wobei $x_1, x_2 \notin [a,b]$ gelten muss.
Der entscheidende Trick bei der Berechnung dieses Integrals ist, den Integranden geschickt umzuschreiben:

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right). \tag{1.32}$$

(Dieses Verfahren nennt man Partialbruchzerlegung. Es kann auch auf Polynome höherer Ordnung angewandt werden. Wir verweisen für Details auf die Literatur).

Mit Hilfe von Gleichung (1.32) können wir das Integral (1.31) berechnen:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx \\
&= \frac{1}{x_1-x_2}\left(\int_a^b \frac{1}{(x-x_1)}\,dx - \int_a^b \frac{1}{(x-x_2)}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{x_1-x_2}\left(\log(x-x_1)\Big|_a^b - \log(x-x_2)\Big|_a^b\right) \\
&= \frac{1}{x_1-x_2}\Big(\log(b-x_1) - \log(a-x_1) - \log(b-x_2) + \log(a-x_2)\Big) \\
&= \frac{1}{x_1-x_2}\log\left(\frac{(b-x_1)(a-x_2)}{(b-x_2)(a-x_1)}\right),
\end{aligned}$$

wobei wir $(x_2 <)\ x_1 < a$ angenommen haben. (In den anderen zwei Fällen „$b < x_2$“ und „$x_2 < a < b < x_1$“ müssen wir – wie in Beispiel 1.2.8 – die Stammfunktion $\log|x|$ von $\frac{1}{x}$ benutzen.) Somit ist

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{1}{x_1-x_2}\log\left(\frac{(b-x_1)(a-x_2)}{(b-x_2)(a-x_1)}\right) \tag{1.33}$$

mit x_1, x_2 in (1.30) und $x_2 < x_1 < a$.

1.2.10 Aufgabe: Berechnen Sie

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{x^2-x-2}\,dx. \tag{1.34}$$

Es bleibt noch der

Fall c) $D = \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 0$:
Dann müssen wir

$$\int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2}\, dx \tag{1.35}$$

untersuchen. Wir betrachten zunächst

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx \tag{1.36}$$

für $0 \notin [a, b]$. Es gilt für $f(x) = -\frac{1}{x}$, dass $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ ist, also

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x}\bigg|_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\,. \tag{1.37}$$

1.2.11 Aufgabe: Berechnen Sie

$$\int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2}\, dx \tag{1.38}$$

für $-\frac{\beta}{2} \notin [a, b]$.

1.2.12 Beispiel: In diesem Beispiel wollen wir Integrale der Gestalt

$$\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\, dx \tag{1.39}$$

für $n, m \in \mathbb{N}$ $(n, m \geq 1)$ berechnen. Solche Integrale spielen in der Theorie der Fourier-Reihen eine wichtige Rolle.

Beachten Sie, dass die Integranden $\sin(kx)$ an den Integrationsgrenzen 0 und π verschwinden (weil $k \in \mathbb{N}$ ist.)

Wir behandeln das Integral (1.39) mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\, dx &= \int_0^\pi \sin(nx)\left(\frac{-1}{m}\cos(mx)\right)' dx \\
&= -\sin(nx)\frac{1}{m}\cos(mx)\bigg|_0^\pi + \int_0^\pi n\cos(nx)\cdot\frac{1}{m}\cos(mx)\, dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{n}{m} \int\limits_0^{\pi} \cos(nx) \cdot \cos(mx)\, dx, \tag{1.40}$$

weil $\sin(nx)\cos(mx) \Big|_0^{\pi} = 0$ ist.

Das Integral (1.40) sieht nicht viel einfacher aus als das Ausgangs-Integral (1.39) und tatsächlich fällt uns nichts anderes ein als nochmal partiell zu integrieren: Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
(1.40) &= \frac{n}{m} \int\limits_0^{\pi} \cos(nx) \left(\frac{1}{m}\sin(mx)\right)' dx \\
&= \frac{n}{m} \cos(nx) \frac{1}{m} \sin(mx) \Big|_0^{\pi} \; + \; \frac{n^2}{m^2} \int\limits_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx \\
&= \frac{n^2}{m^2} \int\limits_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx.
\end{aligned}$$

Damit scheinen wir uns im Kreis gedreht zu haben. Aber das ist nicht wahr, denn wir haben

$$\int\limits_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx = \frac{n^2}{m^2} \int\limits_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx \tag{1.41}$$

gezeigt. Daraus folgt für $n \neq m$:

$$\int\limits_0^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\, dx = 0. \tag{1.42}$$

Für $n = m$ haben wir gezeigt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\pi} \sin^2(nx)\, dx &= \int\limits_0^{\pi} \cos^2(nx)\, dx \qquad \text{(mit (1.40))} \\
&= \int\limits_0^{\pi} (1 - \sin^2(nx))\, dx \qquad \text{(weil } \sin^2 x + \cos^2 x = 1\text{)} \\
&= \pi - \int\limits_0^{\pi} \sin^2(nx)\, dx.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int\limits_0^{\pi} \sin^2(nx)\, dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{1.43}$$

1.2.13 Aufgabe: Seien $0 < a < b$ gegeben. Berechnen Sie $\int_a^b \log x \, dx$.

1.3 Grenzwerte und Integrale

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage, ob (und in welchem Sinne)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

gilt, also ob Limes und Integral vertauscht werden können. Dazu ist zunächst zu klären, was mit $\lim_{n\to\infty} f_n$, also dem Grenzwert einer Funktionenfolge eigentlich gemeint ist. Wir werden dazu einen ausführlichen Einschub über Konvergenz von Funktionenfolgen machen.

1.3.1 Definition: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Funktionenfolge auf $M \subset \mathbb{R}$, d.h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, f_n **konvergiert punktweise** gegen die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, wenn für alle $x \in M$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x). \tag{1.44}$$

1.3.2 Beispiele:

1. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right) x^2 \tag{1.45}$$
konvergiert punktweise gegen
$$f(x) = x^2. \tag{1.46}$$

2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = x^n \tag{1.47}$$
konvergiert punktweise gegen die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1), \\ 1 & x = 1. \end{cases} \tag{1.48}$$
(Für $0 \le x < 1$ gilt $x^n \to 0$.)

3. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \tag{1.49}$$
konvergiert punktweise gegen
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x. \tag{1.50}$$

4. $f_n : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.51}$$

   Dann konvergiert f_n punktweise gegen die „Nullfunktion“

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [-2, 2]. \tag{1.52}$$

5. Verallgemeinerung von 4:
   a_n sei eine beliebige Folge reeller Zahlen. $f_n : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n & \text{für } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.53}$$

   Dann konvergiert f_n punktweise gegen die Nullfunktion in (1.52).

Leider sieht man an diesen Beispielen, dass punktweiser Limes und Integral nicht immer miteinander vertauschen.
Genauer: Konvergiert die Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ punktweise gegen eine Riemann-integrierbare Funktion f, dann folgt NICHT, dass

$$\int\limits_a^b f_n(x)\, dx \quad \text{gegen} \quad \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

konvergiert.
Im Beispiel 4 gilt:

$$\int\limits_{-2}^{2} f_n(x)\, dx = 1 \qquad \text{für alle } n,$$

während die Grenzfunktion $f(x) = 0$ das Integral $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx = 0$ hat.
Im Beispiel 5 gilt:

$$\int\limits_{-2}^{2} f_n(x)\, dx = \frac{1}{n}\, a_n\,.$$

Durch Wahl von $a_n = n \cdot a$ können wir $\frac{1}{n}\, a_n$ gegen jede beliebige reelle Zahl a konvergieren lassen, durch die Wahl $\alpha_n = n^2$ konvergiert $\frac{1}{n}\, a_n$ nicht (wir sagen $\frac{1}{n}\, a_n$ konvergiert gegen Unendlich), für $a_n = a \cdot n(-1)^n$ springt $\frac{a_n}{n}$ zwischen den Werten a und $-a$ hin und her (konvergiert also erst recht nicht).

Tatsächlich kommt noch eine grundlegende Schwierigkeit dazu:
Sind die Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und konvergiert die Folge f_n punktweise gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dann muss f nicht einmal beschränkt sein, und erst recht nicht Riemann-integrierbar.

1.3.3 Beispiel: Sei

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad \frac{1}{n} \le x \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.54}$$

dann konvergiert f_n punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für} \quad 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{für} \quad -1 \le x \le 0. \end{cases} \tag{1.55}$$

Die Funktionen f_n sind alle beschränkt (aber die Schranke hängt von n ab!), die Funktion f ist unbeschränkt.

1.3.4 Beispiel: Sei

$$\mathbb{Q}_n = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, q \in \{1,\dots,n\}\,, p \in \{0,1,\dots,q\} \right\}, \tag{1.56}$$

dann gilt $\mathbb{Q}_n \subset \mathbb{Q}_{n+1}$ und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n \subset [0,1]\,. \tag{1.57}$$

Wir setzen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in \mathbb{Q}_n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.58}$$

Die Menge $\mathbb{Q}_n$ ist endlich, daher ist jedes f_n stückweise stetig und beschränkt. Satz 1.1.19 zeigt, dass alle f_n Riemann-integrierbar sind.
Ist x eine irrationale Zahl ($x \notin \mathbb{Q}$), dann gilt $f_n(x) = 0$ für alle n.
Ist x eine rationale, etwa $x = \frac{p}{q}$, dann liegt $x \in \mathbb{Q}_n$ für alle $n \ge q$. Also gilt dann

$$f_n(x) = 1 \quad \text{für} \quad n \ge q\,. \tag{1.59}$$

Daher folgt:

$$f_n(x) \to f_0(x) \qquad\qquad (x \in [0,1]), \tag{1.60}$$

wobei $f_0 = \chi_D$ die Dirichletfunktion (siehe (1.17)) ist. Die f_n konvergieren also punktweise gegen eine beschränkte Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist.

Aus dem Gesagten kann man folgern:
Riemann-Integral und punktweise Konvergenz passen nicht recht zusammen.

Es stellt sich heraus, dass die punktweise Konvergenz im Zusammenhang mit dem Riemann-Integral ein zu schwacher Begriff ist.

Exkurs: Gleichmäßige Konvergenz.

1.3.5 Definition: Ist $M \subset \mathbb{R}$ und sind f_n und f Funktionen mit $f_n : M \to \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$, dann sagen wir: Die Funktionenfolge f_n **konvergiert gleichmäßig** gegen die Funktion f, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in M$ und alle $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{1.61}$$

gilt. Statt f_n konvergiert gleichmäßig gegen f, schreiben wir auch $f_n \to f$ gleichmäßig (auf M).

Die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige Konvergenz von Folgen unterscheiden sich „nur“ durch das Vertauschen von zwei Quantoren.

Punktweise Konvergenz

Zu $\varepsilon > 0$ und $x \in M$ gibt es ein $N \quad (= N(\varepsilon, x))$, so dass für alle $n \geq N$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

D. h. : Wenn ich punktweise Konvergenz behaupte, verpflichte ich mich zu folgendem:
Sie geben ε und x vor, dann gebe ich Ihnen ein N an, so dass für $n \geq N$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

ist.
Mein N darf von ε *und* x abhängen.

Gleichmäßige Konvergenz

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so dass für alle $x \in M$ und alle $n \geq N$ gilt:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

D. h. : Wenn ich gleichmäßige Konvergenz behaupte, verpflichte ich mich zu folgendem:
Sie geben mir $\varepsilon > 0$ vor (aber noch kein x),
dann muss ich Ihnen ein N angeben, so dass

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq N$$

und ALLE x, egal wie Sie x (nachdem ich N angegeben habe) wählen.

1.3.6 Beispiele:

1. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})x^2$.
   f_n konvergiert gleichmäßig gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

   Beweis dieser Aussage: Sei $\varepsilon > 0$.
   Wähle $N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, dann gilt für $n \geq N$ und alle $x \in [0,1]$:

   $$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left|\frac{x}{n}\,x^2\right| = \frac{1}{n}\,|x^3| \leq \frac{1}{n} \qquad\qquad \text{(weil} \quad |x| \leq 1) \\ &\leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

   □

2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise gegen

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

   Aber: f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f.
   Es gilt

   $$\begin{aligned} f_n(x) = x^n \to 0 = f(x) & \qquad\qquad (0 \leq x < 1) \text{ und} \\ f_n(1) = 1^n = 1 \to 1 = f(1) & \qquad\qquad \text{für } n \to \infty. \end{aligned}$$

   Sei nun $0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{3}$, dann ist $\sqrt[n]{2\varepsilon} < 1$ für alle $n \geq 1$. Dann gilt mit $x = \sqrt[n]{2\varepsilon}$

   $$|f(x) - f_n(x)| = |0 - x^n| = x^n = 2\varepsilon > \varepsilon.$$

   Damit haben wir gezeigt:
   Es gibt ein $\varepsilon > 0$ (jedes $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$ tut's), so dass es für jedes n ein $x \in [0,1]$ gibt (z.B. $x = \sqrt[n]{2\varepsilon}$), so dass

   $$|f(x) - f_n(x)| > \varepsilon$$

   ist. Das heißt, f_n konvergiert nicht gleichmäßig gegen f.

3. Wir betrachten die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$. Hat $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$ den Konvergenzradius $R > 0$, dann konvergiert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$ für $|x| < R$ absolut. Durch

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k\,x^k \tag{1.62}$$

   ist eine Funktion $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definiert (siehe MG Kapitel 17).
   Wir setzen $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,x^k$ und behaupten:

1.3.7 Proposition: Hat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den Konvergenzradius R und ist $[a,b] \subset (-R,R)$, dann konvergiert die Funktionenfolge

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\ x^k \tag{1.63}$$

gleichmäßig gegen die Funktion

$$f : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k. \tag{1.64}$$

Beweis: R_0 sei so gewählt, dass $[a,b] \subset [-R_0, R_0] \subset (-R,R)$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ für $x = R_0$ absolut, d.h.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, {R_0}^k < \infty\ .$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein N_0, so dass $\sum_{k=N_0}^{\infty} |a_k|\, {R_0}^k < \varepsilon$ gilt. Dann folgt für $x \in [a,b]$, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\, |x|^k \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|\, {R_0}^k \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

falls $n \geq N_0$. Also konvergiert f_n gleichmäßig gegen f. □

Aus den Definitionen 1.3.1 und 1.3.5 der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz folgt direkt die nachstehende Aussage.

1.3.8 Proposition: Wenn f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, dann konvergiert f_n auch punktweise gegen f.

1.3.9 Bemerkung: Die Umkehrung von Proposition 1.3.8 gilt nicht (siehe Beispiel 2 in 1.3.6).

1.3.10 Definition: Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann setzen wir

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in M} |f(x)|. \tag{1.65}$$

$\|f\|_\infty$ heißt die **Supremumsnorm** von f.

1.3.11 Proposition: Sind f und g auf M beschränkte Funktionen, dann gilt die **Dreiecksungleichung**:

$$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty. \tag{1.66}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|f+g\|_\infty &= \sup_{x\in M} |f(x)+g(x)| \\ &\le \sup_{x\in M}\{|f(x)|+|g(x)|\} \\ &\le \sup_{x\in M} |f(x)| + \sup_{x\in M} |g(x)| \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

□

1.3.12 Satz: Sind $f_n, f : M \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, dann gilt:

$$f_n \to f \text{ gleichmäßig} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \|f-f_n\|_\infty = 0. \tag{1.67}$$

1.3.13 Bemerkung: Mit $f - f_n$ meinen wir die Funktion

$$(f-f_n)(x) = f(x) - f_n(x).$$

Also ist

$$\|f-f_n\|_\infty = \sup_x |f(x) - f_n(x)|.$$

Beweis von Satz 1.3.12:

„⇒“ Angenommen, f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.
Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, so dass für $n \ge N$ und alle $x \in M$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt:

$$\|f-f_n\|_\infty = \sup_{x\in M} |f(x)-f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{1.68}$$

Daher konvergiert $\|f-f_n\|_\infty$ gegen Null.

„$\Leftarrow$“ Angenommen, $\|f - f_n\|_\infty$ konvergiert gegen Null.
Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, so dass für $n \geq N$ gilt

$$\|f - f_n\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

also gilt für alle $x \in M$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Daher konvergiert f_n gleichmäßig gegen f.

□

1.3.14 Aufgabe: Warum kann man in (1.68) nicht schließen, dass $\sup_{x \in M} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist?

1.3.15 Korollar: $f_n : M \to \mathbb{R}$ seien beschränkte Funktionen. Wenn f_n gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, dann gilt:
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n, m \geq N$ gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \tag{1.69}$$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq N\,.$$

Sind $n, m \geq N$, dann gilt mit Proposition 1.3.11

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_\infty &= \|f_n - f + f - f_m\|_\infty \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Wir haben in Beispiel 2 aus 1.3.6 gesehen, dass die *punktweise* Konvergenz einer Folge von stetigen Funktionen nicht stetig sein muss. Bei *gleichmäßiger* Konvergenz gilt dagegen:

1.3.16 Satz: Konvergiert die Funktionenfolge $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) gleichmäßig gegen die Funktion f und sind alle f_n stetig auf $[a, b]$, dann ist auch f stetig auf $[a, b]$.

1.3.17 Bemerkung: Der Satz gilt auch viel allgemeiner für $f_n : M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}^d$, f_n stetig auf M. Im Kapitel 2 werden wir die Stetigkeit von Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ definieren und den allgemeineren Satz beweisen. Der folgende Beweis benötigt dafür nur kleinste Änderungen.

Beweis von Satz 1.3.16: Für (beliebige) $x, y \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\ &\leq |f_n(x) - f_n(y)| + 2\,\|f - f_n\|_\infty.\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, können wir n so wählen, dass $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. Für dieses (jetzt fest gewählte) n gilt also für alle $x, y \in M$:

$$|f(x) - f(y)| < |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.70}$$

Laut Voraussetzung ist die Funktion f_n stetig in jedem Punkt $x \in M$. D. h. wir können $\delta > 0$ so wählen, dass aus $|x - y| < \delta$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

folgt. Mit diesem δ folgt dann aus (1.70) für alle y mit $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &< |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit wurde gezeigt: f ist an der (beliebigen) Stelle $x \in M$ stetig. $\square$

1.3 Grenzwerte und Integrale: Fortsetzung

Wir zeigen jetzt, dass man den gleichmäßigen Limes „aus dem Riemann-Integral herausziehen“ kann, genauer:

1.3.18 Satz: Sind die Funktionen f_n auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und konvergiert die Funktionenfolge f_n auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion f, dann ist auch f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{1.71}$$

Für den Beweis benötigen wir folgendes Lemma:

1.3.19 Lemma: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien Funktionen mit $\|f-g\|_\infty \leq \alpha$.
Dann gilt für jedes Intervall $[c,d] \subset [a,b]$:

$$\sup_{x\in[c,d]} f(x) \leq \sup_{x\in[c,d]} g(x) + \alpha \tag{1.72}$$

und

$$\inf_{x\in[c,d]} f(x) \geq \inf_{x\in[c,d]} g(x) - \alpha. \tag{1.73}$$

Beweis (Lemma 1.3.19):

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[c,d]} f(x) &= \sup_{x\in[c,d]} \Big(f(x)-g(x)+g(x)\Big) && (1.74)\\
&\leq \sup_{x\in[c,d]} \Big(f(x)-g(x)\Big) + \sup_{x\in[c,d]} g(x) && (1.75)\\
&\leq \sup_{x\in[c,d]} g(x) + \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| && (1.76)\\
&= \sup_{x\in[c,d]} g(x) + \|f-g\|_\infty\\
&\leq \sup_{x\in[c,d]} g(x) + \alpha
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\inf_{x\in[c,d]} f(x) &= \inf_{x\in[c,d]} (f(x)-g(x)+g(x))\\
&\geq \inf_{x\in[c,d]} g(x) + \inf_{x\in[c,d]} (f(x)-g(x))\\
&\geq \inf_{x\in[c,d]} g(x) - \sup_{x\in[c,d]} |f(x)-g(x)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \inf_{x\in[c,d]} g(x) - \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)| \\
&= \inf_{x\in[c,d]} g(x) - \|f-g\|_\infty \\
&\geq \inf_{x\in[c,d]} g(x) - \alpha.
\end{aligned}$$

□

1.3.20 Bemerkung: Im obigen Beweis haben wir die Ungleichungen:

$$\sup_{x\in M}\Big(f(x)+g(x)\Big) \leq \sup_{x\in M} f(x) + \sup_{x\in M} g(x), \tag{1.77}$$

$$\inf_{x\in M}\Big(f(x)+g(x)\Big) \geq \inf_{x\in M} f(x) + \inf_{x\in M} g(x) \quad \text{und} \tag{1.78}$$

$$\inf_{x\in M} h(x) \geq -\sup_{x\in M} |h(x)| \tag{1.79}$$

benutzt.

1.3.21 Aufgabe: Beweisen Sie die Ungleichungen (1.77), (1.78) und (1.79) und zeigen Sie an Beispielen, dass jeweils die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt.

Wir beweisen jetzt Satz 1.3.18.

Beweis (Satz 1.3.18): Für jede Partition $P = \langle t_0, \ldots, t_K\rangle$ von $[a,b]$ und jedes f_n gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(f,P) &= \sum_{k=1}^{K}\left(\sup_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x)\right)(t_k-t_{k-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{K}\left(\sup_{x\in[t_{k-1},t_k]} f_n(x) + \|f-f_n\|_\infty\right)(t_k-t_{k-1}) \\
&\qquad\qquad\qquad (\text{nach Lemma 1.3.19 mit } \alpha = \|f-f_n\|_\infty) \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sup_{x\in[t_{k-1},t_k]} f_n(x)\right)(t_k-t_{k-1}) + \sum_{k=1}^{K}\|f-f_n\|_\infty\,(t_k-t_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sup_{x\in[t_{k-1},t_k]} f_n(x)\right)(t_k-t_{k-1}) \ + \ \|f-f_n\|_\infty\,(b-a) \\
&\qquad\qquad\qquad \Big(\text{da } \sum_{k=1}^{K}(t_k-t_{k-1}) = t_K - t_0 = b-a\Big) \\
&= \mathcal{O}(f_n,P) + \|f-f_n\|_\infty\,(b-a).
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Analog zeigt man

$$\mathcal{U}(f,P) \geq \mathcal{U}(f_n,P) - \|f-f_n\|_\infty\,(b-a). \tag{1.81}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir nun N so groß, dass

$$\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

für alle $n \geq N$ gilt. Da f_n eine stetige Funktion ist, ist f_n nach Satz 1.1.16 Riemann-integrierbar. Folglich gibt es eine Partition P, so dass

$$\mathcal{O}(f_n, P) - \mathcal{U}(f_n, P) < \frac{\varepsilon}{4} \tag{1.82}$$

ist (siehe Proposition 1.1.9). Mit dieser Partition P gilt daher:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(f, P) - \mathcal{U}(f, P) &\leq \Big(\mathcal{O}(f_n, P) + (b-a)\|f - f_n\|_\infty\Big) \\
&\qquad\qquad - \Big(\mathcal{U}(f_n, P) - (b-a)\|f - f_n\|_\infty\Big) \\
&= \mathcal{O}(f_n, P) - \mathcal{U}(f_n, P) + 2(b-a)\|f - f_n\|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher ist f Riemann-integrierbar (nach Proposition 1.1.9).

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\leq \mathcal{O}(f, P) \\
&\leq \mathcal{O}(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{(mit (1.80))} \\
&\leq \mathcal{U}(f_n, P) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(mit (1.82))} \\
&\leq \int\limits_a^b f_n(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\geq \mathcal{U}(f, P) \\
&\geq \mathcal{U}(f_n, P) - \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{(mit (1.81))} \\
&\geq \mathcal{O}(f_n, P) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(mit (1.82))} \\
&\geq \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Wir haben außerdem benutzt, dass für jede Riemann-integrierbare Funktion g

$$\mathcal{U}(g,P) \leq \int\limits_a^b g(x)\,dx \leq \mathcal{O}(g,P)$$

gilt. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$$

□

1.3.22 Korollar: Hat die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$ den Konvergenzradius $R > 0$ und ist $[a,b] \subset (-R,R)$, dann ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \text{ auf } [a,b] \tag{1.83}$$

Riemann-integrierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}). \end{aligned} \tag{1.84}$$

Beweis: Nach Beispiel 3 in 1.3.6 konvergiert $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\,x^k$ auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f. Nach Satz 1.3.18 gilt daher

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n(x)\,dx &= \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k\Big)\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}\Big(b^{k+1} - a^{k+1}\Big). \end{aligned}$$

□

1.4 Uneigentliche Riemann-Integrale

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer Erweiterung des Riemann-Integrals, die uns erlaubt, auch (gewisse) unbeschränkte Funktionen zu integrieren und auch (gewisse) Funktionen über unbeschränkte Intervalle (z.B. $[0,\infty)$ oder $\mathbb{R}$) zu integrieren.

Wir benötigen zunächst einige Sprechweisen zu Grenzwerten von Funktionen. (Grenzwerte von Funktionen wurden bereits in MG 14.3 eingeführt.)

1.4.1 Definition: Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann bedeutet

$$\lim_{x \searrow a} f(x) \; = f_0, \tag{1.85}$$

dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ exisitiert, so dass gilt:
Aus $x \in (a, a+\delta) \cap (a,b)$ folgt $|f(x) - f_0| < \varepsilon$.

Analog, sagen wir, dass

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) \; = f_0, \tag{1.86}$$

wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ exisitiert, so dass gilt:
Aus $x \in (b-\delta, b) \cap (a,b)$ folgt $|f(x) - f_0| < \varepsilon$.

Ist $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann meinen wir mit

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \; = f_0, \tag{1.87}$$

dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $R \in (a,\infty)$ existiert, so dass gilt:
Aus $x > R$ folgt $|f(x) - f_0| < \varepsilon$.

Statt $\lim\limits_{x \to \infty}$ schreiben wir gelegentlich auch $\lim\limits_{x \nearrow \infty}$.

In ähnlicher Weise definieren wir $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Schließlich sagen wir, dass

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \; = \infty, \tag{1.88}$$

wenn zu jedem $N > 0$ ein $R \in (a,\infty)$ existiert, so dass gilt: Aus $x > R$ folgt $f(x) > N$.

In der gleichen Art und Weise sind $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) \; = \infty$, $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) \; = -\infty$ usw. zu verstehen.

1.4.2 Warnung: „$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$“ ist eine symbolische Schreibweise. Mit dem Ausdruck „$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert“ meinen wir weiterhin, dass der Limes *als reelle Zahl* existiert. Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ist, existiert der Limes also *nicht*.

1.4.3 Proposition: Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende Funktion, dann gilt entweder $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = f_0$ für ein $f_0 \in \mathbb{R}$ oder es gilt: $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = \infty$.

1.4.4 Bemerkung: In Proposition 1.4.3 kann b durch ∞ ersetzt werden. Analoge Resultate gelten auch bei monoton fallenden Funktionen und am linken Rand a des Intervalls.

Beweis (Proposition 1.4.3): Ist f unbeschränkt, dann gibt es zu jedem $N > 0$ ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) > N$. Wegen der Monotonie von f folgt: $f(x) > N$ für alle $x \in (x_0, b)$, also gilt $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = \infty$.

Die Folge $x_n = b - \frac{1}{n+1}(b-a) \in (a,b)$ ist monoton steigend und konvergiert gegen b. Ist f beschränkt, dann ist insbesondere die Folge $y_n = f(x_n)$ beschränkt und monoton. Daher konvergiert y_n gegen eine Zahl $f_0 \in \mathbb{R}$.
Ist nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es also ein n mit

$$|f_0 - y_n| \;=\; f_0 - f(x_n) \;<\; \varepsilon.$$

Wegen der Monotonie folgt daher, dass für $x \in (x_n, b)$ ebenfalls $f_0 - f(x) < \varepsilon$ gilt.

Also folgt $\lim\limits_{x\nearrow b} f(x) = f_0$. □

Wir diskutieren das Vorgehen beim Integrieren unbeschränkter Funktionen zunächst an einem typischen Beispiel.

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^\alpha \tag{1.89}$$

auf dem Intervall $[0,1]$.

Für $\alpha \geq 0$ ist f auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ definiert, f hat die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$.
Dagegen ist f für $\alpha < 0$ in $x = 0$ nicht definiert, wir betrachten die Funktion f daher (für $\alpha < 0$) nur auf dem (halboffenen) Intervall $(0,1]$. f (immer für $\alpha < 0$) ist hier nicht beschränkt. Das Riemann-Integral für f ist also nicht definiert. Wir können bereits den Begriff „Obersumme“ nicht anwenden. Für $\alpha \neq -1$ ist allerdings F immer noch eine Stammfunktion. Auf jedem Intervall $[c,1] \subset (0,1]$

(also $0 < c < 1$) ist f beschränkt und Riemann-integrierbar und es gilt:
Für $\alpha \neq -1$

$$\int_c^1 f(x)\,dx = F(1) - F(c) = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\,c^{\alpha+1} \tag{1.90}$$

und für $\alpha = -1$

$$\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \log(1) - \log(c) = -\log(c). \tag{1.91}$$

Es liegt nun nahe in der Gleichung (1.90) den Grenzübergang $c \searrow 0$ zu versuchen:

Für $\alpha > -1$ ist:

$$\begin{aligned} \lim_{c\searrow 0}\int_c^1 f(x)\,dx &= \lim_{c\searrow 0}\int_c^1 x^\alpha\,dx \\ &= \lim_{c\searrow 0}\left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}\,c^{\alpha+1}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha+1}. \end{aligned} \tag{1.92}$$

Dagegen existiert der Grenzwert $c \searrow 0$ für $\alpha < -1$ nicht, da dann $c^{\alpha+1}$ nicht konvergiert.

Im Fall $\alpha = -1$ haben wir (für $c > 0$) in (1.91) $\int_c^1 x^{-1}\,dx = -\log(c)$ berechnet. Für $c \searrow 0$ konvergiert $\log c$ ebenfalls nicht.

Dieses Beispiel motiviert die folgende Definition:

1.4.5 Definition: Eine Funktion $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **(bei a) uneigentlich Riemann-integrierbar**, wenn f auf jedem Intervall $[c,b] \subset (a,b]$ Riemann-integrierbar ist und

$$\lim_{c\searrow a}\int_c^b f(x)\,dx \quad \text{existiert (und endlich ist).} \tag{1.93}$$

Der Grenzwert $\lim_{c\searrow a}\int_c^b f(x)\,dx$ heißt das uneigentliche Riemann-Integral von f über $(a,b]$ und wird mit

$$\int_{a+}^b f(x)\,dx \tag{1.94}$$

bezeichnet.

Eine Funktion $f\ :\ \ (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ heißt **(bei −unendlich) uneigentlich Riemann-integrierbar**, wenn f auf jedem Intervall $[c, b] \subset (-\infty, b]$ Riemann-integrierbar ist und

$$\lim_{c \searrow -\infty} \int\limits_c^b f(x)\, dx \quad \text{existiert (und endlich ist).}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{c \searrow -\infty} \int\limits_c^b f(x)\, dx$ heißt das uneigentliche Riemann-Integral von f über $(-\infty, b]$ und wird mit

$$\int\limits_{-\infty+}^b f(x)\, dx \qquad \text{oft auch einfach mit} \qquad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\, dx$$

bezeichnet.

Eine Funktion $f\ :\ [a, b) \to \mathbb{R}$ heißt **(bei b) uneigentlich Riemann-integrierbar**, wenn f auf jedem Teilintervall $[a, c] \subset [a, b)$ Riemann-integrierbar ist und

$$\lim_{c \nearrow b} \int\limits_a^c f(x)\, dx \quad \text{existiert (und endlich ist).} \tag{1.95}$$

Der Grenzwert heißt uneigentliches Riemann-Integral von f über $[a, b)$ und wird mit

$$\int\limits_a^{b-} f(x)\, dx \tag{1.96}$$

bezeichnet. Analog zu (1.4.5) kann man b durch $+\infty$ ersetzen und das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int\limits_a^{+\infty-} f(x)\, dx$$

definieren, das häufig auch mit

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

bezeichnet wird.

Gilt $\lim\limits_{c \nearrow b} \int\limits_a^c f(x)\,dx = \infty$, dann schreiben auch $\int\limits_a^{b-} f(x)\,dx = \infty$.

Eine Funktion $f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt **(bei a und b) uneigentlich Riemann-integrierbar**, wenn f für ein $d \in\ (a,b)$ sowohl über $(a,d]$ als auch über $[d,b)$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Das uneigentliche Riemann-Integral von f über (a,b) ist der Wert

$$\int\limits_{a+}^{b-} f(x)\,dx = \int\limits_{a+}^{d} f(x)\,dx + \int\limits_{d}^{b-} f(x)\,dx\,. \tag{1.97}$$

Analog heißt eine Funktion $f:(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$ bei $-\infty$ und $+\infty$ uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn f für ein $d \in\ (-\infty,+\infty)$ sowohl über $(-\infty,d]$ als auch über $[d,+\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Wir setzen:

$$\int\limits_{-\infty+}^{+\infty-} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int\limits_{d}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Gilt $\int\limits_{a+}^{d} f(x)\,dx = \infty$ und $\int\limits_{d}^{b-} f(x)\,dx = \infty$ oder ist eines der beiden uneigentlichen Integrale unendlich und das andere existiert und ist endlich, dann schreiben wir $\int\limits_{a+}^{b-} f(x)\,dx = \infty$.

1.4.6 Bemerkungen:

1. Wir nennen eine Funktion f *nur dann* uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn der Grenzwert der Integrale (1.93), bzw. (1.95) *endlich* ist. Warnung 1.4.2 gilt auch hier: $\int\limits_{a}^{b-} f(x)\,dx = \infty$ ist nur eine symbolische, allerdings recht praktische Schreibweise.
2. Ist $f:\ (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, dann hängt das Integral $\int\limits_{a+}^{b-} f(x)\,dx$ nicht vom gewählten Zwischenwert $d \in\ (a,b)$ ab (siehe Satz 1.1.11).

3. Häufig werden uneigentliche Riemann-Integrale wie $\int\limits_{a+}^{b} f(x)\,dx$ als $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ geschrieben. Der Leser muss dann aus dem Zusammenhang wissen (oder erraten), dass ein uneigentliches Riemann-Integral gemeint ist.
4. $\overline{f}$ sei eine Funktion auf $[a,b]$ und f die Einschränkung von $\overline{f}$ auf $(a,b]$, also $f:\ (a,b]\to\mathbb{R}\,,\ f(x)=\overline{f}(x)$ für alle $x\in\ (a,b]$.
Ist $\overline{f}$ auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar, dann ist $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ (bei a) uneigentlich Riemann-integrierbar und die Integrale stimmen überein, d.h.:
$$\int\limits_{a}^{b}\overline{f}(x)\,dx=\int\limits_{a+}^{b} f(x)\,dx. \tag{1.98}$$
5. Damit eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ bei a *und* b uneigentlich Riemann-integrierbar ist, muss man die Existenz der uneigentlichen Integrale
$$\int\limits_{a+}^{d} f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{d}^{b-} f(x)\,dx \qquad (\text{für } a<d<b)$$
unabhängig voneinander zeigen. Die Existenz des Grenzwerts $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ reicht *nicht*, wie nachstehendes Beispiel 4 in 1.4.7 zeigt.

1.4.7 Beispiele:

1. Wir haben bereits am Beginn des Abschnittes die Funktionen $f(x)=x^\alpha$ auf $(0,1]$ betrachtet. (Siehe (1.89).)
Für $\alpha\geq 0$ ist f sogar auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. (Genauer, die Fortsetzung $\overline{f}(x)=x^\alpha$ für $x\in[0,1]$ ist dort Riemann-integrierbar).
Für $\alpha<0$ ist die Funktion f auf $(0,1]$ nicht beschränkt, also ist sie sicher nicht die Einschränkung einer Riemann-integrierbaren Funktion $\overline{f}$ auf $[0,1]$.
Wegen
$$\int\limits_{c}^{1} x^\alpha\,dx=\begin{cases}\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}\,c^{\alpha+1} & \text{für} \quad \alpha\neq -1,\\ -\log c & \text{für} \quad \alpha=-1\end{cases} \tag{1.99}$$
ist die Funktion $f(x)=x^\alpha$ für $-1<\alpha<0$ bei $a=0$ uneigentlich Riemann-integrierbar
(aber nicht die Einschränkung einer Riemann-integrierbaren Funktion).
Für $\alpha\leq -1$ ist f bei $a=0$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar.

2. Wir betrachten die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$ auf $[1, \infty)$.
   Wegen
$$\int_1^d x^{-\beta}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\, d^{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta} & \text{für } \beta \neq 1 \text{ und} \\ \log d & \text{für } \beta = 1 \end{cases} \tag{1.100}$$
   ist die Funktion $f(x) = x^{-\beta}$ für $\beta > 1$ bei $d = \infty$ uneigentlich Riemann-integrierbar.
   Für $\beta \leq 1$ ist f bei $d = \infty$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar.

3. Die Funktion $f: (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist (bei -1 und 1) uneigentlich Riemann-integrierbar. Und nach MG 19.2.7 ist $F(x) = \arcsin x$ eine Stammfunktion von f.
   Also gilt für $c < 0$:
$$\int_c^0 f(x)\, dx = \arcsin(0) - \arcsin(c). \tag{1.101}$$
   Es gilt $\arcsin 0 = 0$ (da $\sin 0 = 0$) und
$$\lim_{c \searrow -1} \arcsin(c) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \tag{1.102}$$
   (da arcsin stetig ist und $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$).
   Also folgt
$$\lim_{c \searrow -1} \int_c^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{1.103}$$
   Analog ergibt sich
$$\lim_{c \nearrow 1} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{1.104}$$
   Also ist
$$\int_{-1+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi. \tag{1.105}$$

4. Wir untersuchen $g: (-1, 1) \to \mathbb{R}$:
$$g(x) = \frac{x}{1-x^2}. \tag{1.106}$$
   Offenbar ist g nicht beschränkt.
   Es gilt: $\lim\limits_{x \searrow -1} g(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow 1} g(x) = \infty$.
   Da
$$g(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}\right), \tag{1.107}$$

findet man als Stammfunktion

$$G(x) = -\frac{1}{2}\Big(\log(1+x) + \log(1-x)\Big) \tag{1.108}$$

also für $\alpha, \beta \in (-1,1) \quad (\alpha < \beta)$

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \frac{x}{1-x^2}\,dx = &-\frac{1}{2}\Big(\log(1+\beta) + \log(1-\beta)\Big)\\ &+\frac{1}{2}\Big(\log(1+\alpha) + \log(1-\alpha)\Big).\end{aligned} \tag{1.109}$$

Folglich konvergiert bei festem $d \in (-1,1)$

$$\int_c^d \frac{x}{1-x^2}\,dx \quad \text{für} \quad c \searrow -1$$

nicht („gegen $-\infty$“). Ebenso konvergiert

$$\int_d^c \frac{x}{1-x^2}\,dx \quad \text{für} \quad c \nearrow 1$$

nicht („gegen $+\infty$“). Also ist $\frac{x}{1-x^2}$ auf $(-1,1)$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar.

Man beachte, dass wegen $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$ die Gleichung $g(x) = -g(-x)$ gilt. Folglich ist $\int_{-c}^{c} \frac{x}{1-x^2}\,dx = 0$ für alle $c \in (-1,1)$. Der Grenzwert

$$\lim_{c \nearrow 1} \int_{-c}^{c} \frac{x}{1-x^2}\,dx$$

existiert also (und ist gleich 0). Dennoch ist $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar, weil die Grenzwerte am linken und rechten Endpunkt des Intervalls $(-1,1)$ *einzeln* nicht existieren.

Für viele Funktionen ist die Stammfunktion nicht explizit bekannt. Um zu zeigen, dass sie uneigentlich Riemann-integrierbar sind, ist der folgende Satz nützlich.

1.4.8 Satz: Ist die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[c,d] \subset (a,b)$ Riemann-integrierbar und gilt

$$|f(x)| \leq h(x) \quad \text{für alle} \quad x \in (a,b) \tag{1.110}$$

für eine auf (a,b) uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion h, dann ist f auf (a,b) uneigentlich Riemann-integrierbar.

Die Intervallgrenze a darf durch $-\infty$, b durch $+\infty$ ersetzt werden.

Beweis: Wir zeigen den Satz an der Grenze $b=+\infty$, die anderen Fälle ergeben sich auf ähnliche Weise.
Sei $d \in (a,\infty)$ und $d < c_1 < c_2$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_d^{c_2} f(x)\,dx - \int_d^{c_1} f(x)\,dx \right| &= \left| \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx \right| \\
&\le \int_{c_1}^{c_2} |f(x)|\,dx \qquad \text{wegen Folgerung 1.1.12} \\
&\le \int_{c_1}^{c_2} h(x)\,dx \\
&= \int_d^{c_2} h(x)\,dx - \int_d^{c_1} h(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{c\to\infty} \int_d^c h(x)\,dx$ existiert, gilt nach dem Cauchyschen Konvergenzprinzip für Funktionen (MG 14.3.16), dass

$$\int_d^{c_2} h(x)\,dx - \int_d^{c_1} h(x)\,dx < \varepsilon$$

falls $c_1, c_2 > R(\varepsilon)$ sind.
Deshalb ist auch

$$\left| \int_d^{c_2} f(x)\,dx - \int_d^{c_1} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

für c_1, c_2 groß genug. Folglich konvergiert (wieder nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium) $\int_d^c f(x)\,dx$. □

Aus Satz 1.4.8 ergibt sich das folgende Kriterium für Divergenz:

1.4.9 Korollar: Sei $h : [a, b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, d] \subset [a, b)$ Riemann-integrierbar mit $h(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b)$ und es gelte:

$$\int_a^{b-} h(x)\, dx = \infty. \tag{1.111}$$

Ist dann $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a, d] \subset [a, b)$ Riemann-integrierbar und gilt $f(x) \geq h(x)$ für alle $x \in [a, b)$, dann gilt auch:

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx = \infty. \tag{1.112}$$

Die Integralgrenze b darf durch ∞ ersetzt werden.

1.4.10 Aufgabe: Beweisen Sie Korollar 1.4.9.

1.4.11 Beispiel: Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ ist auf $\mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, denn $f(x)$ ist auf $[-1, 1]$ Riemann-integrierbar und für $|x| \geq 1$ gilt

$$f(x) = |f(x)| \leq |x|e^{-x^2} = h(x) \tag{1.113}$$

und $h(x)$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.
Wie wir später sehen werden, gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{1.114}$$

1.4.12 Aufgabe: Zeigen Sie, dass die obige Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) \;=\; |x|\, e^{-x^2}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Als Anwendung des uneigentlichen Riemann-Integrals wollen wir uns jetzt mit der Konvergenz von Reihen beschäftigen.

Zur Erinnerung: Sind $a_j \in \mathbb{R}$, dann heißt die Folge $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ eine Reihe. Falls die Folge S_n konvergiert, sagen wir die Reihe sei konvergent und schreiben für den Grenzwert S von S_n auch $S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$. Falls sogar $\overline{S_n} := \sum_{j=1}^{n} \|a_j\|$ (gegen einen endlichen Wert) konvergiert, sagen wir die Reihe S_n sei absolut konvergent.
Wenn es zu jedem $R \geq 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \geq R$, dann schreiben wir $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$.

1.4.13 Proposition: Gilt $a_j \geq 0$ für alle j, dann konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{n} a_j$, oder es gilt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$.

1.4.14 Aufgabe: Beweisen Sie Proposition 1.4.13.

Sie wissen bereits aus dem Kurs MG, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \tag{1.115}$$

(dann existiert der Limes wegen $\frac{1}{n^2} \geq 0$) und dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \tag{1.116}$$

Diese Ergebnisse werden wir nachvollziehen und auf $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ausdehnen.
Den Schlüssel zu unserer Untersuchung liefert die folgende Beobachtung:

1.4.15 Proposition: a_n sei eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$, dann gilt:
Ist $f : [M, \infty) \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar, und gilt für alle $x \geq M$

$$f(x) \geq a_n \qquad \text{falls } x \in [n, n+1), \tag{1.117}$$

dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und es gilt

$$\sum_{n=M}^{\infty} a_n \;\leq\; \int_M^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1.118}$$

Beweis: Wir definieren die Funktion $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = a_n \qquad \text{falls } x \in [n, n+1).$$

g ist eine Funktion, die zwischen zwei natürlichen Zahlen konstant ist und an den natürlichen Zahlen Sprünge macht.
Laut Satz 1.1.19 ist g daher auf jedem Intervall $[1, k]$, $(k > 1)$, Riemann-integrierbar. Es gilt $g(x) \geq 0$ und

$$g(x) \leq f(x) \text{ für } x \geq M$$

wegen (1.117). Nach Satz 1.4.8 ist g auf $[M, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Da g auf $[1, M]$ Riemann-integrierbar ist, ist g also auch auf $[1, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar.
Nach Definition von g gilt:

$$\int_n^{n+1} g(x)\,dx = a_n,$$

also

$$\int_1^{N+1} g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} a_j$$

und daher

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} g(x)\,dx = \int_1^{\infty} g(x)\,dx < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und die Abschätzung (1.118) ergibt sich unmittelbar aus

$$\int_M^{\infty} g(x)\,dx \leq \int_M^{\infty} f(x)\,dx.$$

$\square$

1.4.16 Korollar: $f : [M, \infty) \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ und a_n sei eine Folge für die $a_n \geq f(x)$ für $x \in [n, n+1)$ gilt $(n \geq M)$.
Ist f für alle $R \geq M$ auf $[M, R]$ Riemann-integrierbar und ist $\int_M^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

1.4.17 Aufgabe: Beweisen Sie Korollar 1.4.16.

1.4.18 Beispiel: Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \text{für } \alpha > 0 \tag{1.119}$$

(Aus MG wissen wir bereis, dass diese Reihe für $\alpha = 2$ konvergiert und für $\alpha = 1$ divergiert.)
Für $x \geq 2$ definieren wir

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^\alpha}. \tag{1.120}$$

Dann ist f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[2, \infty)$, wenn $\alpha > 1$ ist (siehe 1.4.7 Beispiel 2). Für $x \geq 2$ gilt

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(x-1)^\alpha} = f(x) \qquad \text{für } x \in [n, n+1). \tag{1.121}$$

Also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \qquad \text{für } \alpha > 1. \tag{1.122}$$

Wir definieren $h : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = \frac{1}{x^\alpha}. \tag{1.123}$$

Dann gilt

$$a_n \geq h(x) \qquad \text{für } x \in [n, n+1]. \tag{1.124}$$

Die Funktion h ist auf $[1, \infty)$ nicht Riemann-integrierbar, wenn $\alpha \leq 1$ gilt (siehe 1.4.7 Beispiel 2). Also gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty \qquad \text{falls } \alpha \leq 1. \tag{1.125}$$

1.4.19 Aufgabe: Für welche $\beta > 0$ ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\log n)^\beta}$ konvergent?

1.5 Zwei Erweiterungen des Riemann-Integrals

Wir werden in diesem Abschnitt zwei Erweiterungen des Riemann-Integrals kennenlernen, die insbesondere als Beipiele oder Anregungen für den Rest des Kurses dienen. In beiden Fällen werden wir die Mathematik dieser erweiterten Riemann-Integrale nur skizzenhaft entwickeln, weil beide Verallgemeinerungen nur Spezialfälle des später zu entwickelnden allgemeinen Integralbegriffes sind.

Eine wichtige Eigenschaft des Riemann-Integrals ist seine Translationsinvarianz, d. h. die Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx. \tag{1.126}$$

Dies rührt insbesondere daher, dass das „Volumen“ $b-a$ eines Intervall unabhängig von der Lage des Intervalls ist. Mit anderen Worten: $[a,b]$ und $[a+c,b+c]$ haben das gleiche Volumen.
In manchen Situationen ist diese Eigenschaft aber nicht adäquat. So möchte man etwa die Masse einer Substanz ermitteln, die nicht homogen verteilt ist. Dann sollte einem Intervall $[a,b]$ ein Wert (Gesamtmasse im Intervall) zugeordnet werden, der von der Dichte oder Konzentration der betrachteten Substanz in $[a,b]$ abhängt. In einem solchen Fall kann man etwa folgendermaßen vorgehen:
Es sei $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion („Gewichtsfunktion“). Dann ordnen wir dem Intervall $[a,b]$ das Gewicht $G(b)-G(a)$ zu. Die Dichte oder Konzentration ist also hoch, wenn $G(b)-G(a)$ groß ist. Man kann sich $G(b)-G(a)$ als die „Zunahme“ einer Größe (Gewicht, Volumen, Ladung usw.) zwischen a und b vorstellen. Für die Funktion $G(x)=x$ ergibt sich gerade die Gewichtung des Riemann-Integrals, nämlich $b-a$.
Ein mit G gewichtetes Integral kann nun wie beim Riemann-Integral über (gewichtete) Ober- und Untersummen definiert werden, bei denen statt der Länge t_i-t_{i-1} des Intervalls $[t_{i-1},t_i]$ dessen Gewicht $G(t_i)-G(t_{i-1})$ verwendet wird.

1.5.1 Definition: $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei eine monoton wachsende Funktion und $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$.
Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $P=\langle t_0,\dots,t_n\rangle$ eine Partition von $[a,b]$, dann setzen wir für $i=1,\dots,n$:

$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1}\le x\le t_i\} \tag{1.127}$$

und

$$M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1}\le x\le t_i\} \tag{1.128}$$

Wir definieren die **G-Untersumme** als

$$\mathcal{U}_G(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1}) \Big) \tag{1.129}$$

und die **G-Obersumme** als

$$\mathcal{O}_G(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1}) \Big). \tag{1.130}$$

1.5.2 Satz: Ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\sup_{P \in Z([a,b])} \mathcal{U}_G(f,P) = \inf_{P \in Z([a,b])} \mathcal{O}_G(f,P). \tag{1.131}$$

Wie beim Riemann-Integral können wir auf Grund von Satz 1.5.2 stetigen Funktionen f ein gewichtetes Integral zuordnen:

1.5.3 Definition: Ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann definieren wir

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dG(x) &= \sup_{P \in Z([a,b])} \mathcal{U}_G(f,P) \\ &= \inf_{P \in Z([a,b])} \mathcal{O}_G(f,P). \end{aligned} \tag{1.132}$$

Der Wert $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dG(x)$ heißt das **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bezüglich der Gewichtsfunktion G.

1.5.4 Bemerkungen:

1. Für $G(x) = x$ erhalten wir das Riemann-Integral.
2. Wir haben darauf verzichtet, das Riemann-Stieltjes-Integral für nicht stetige Funktionen f zu definieren. Dies hätte etwas mehr Aufwand erfordert. In den folgenden Kapiteln werden wir die Integrationstheorie stark verallgemeinern, so dass das Riemann-Stieltjes-Integral – auch für nicht stetige Funktionen – als Spezialfall im allgemeinen Integrationsbegriff enthalten ist.

Beweis (Satz 1.5.2): Die Funktion f ist nach Satz 1.1.35 gleichmäßig stetig.
Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$, so dass aus $|x - y| < \delta$ mit $x, y \in [a,b]$ folgt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ist also $\widetilde{P} = \langle \widetilde{t}_0, \widetilde{t}_1, \ldots, \widetilde{t}_n \rangle$ eine Partition von $[a,b]$ mit $\delta(\widetilde{P}) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} (\widetilde{t}_i - \widetilde{t}_{i-1}) < \delta$, dann gilt:

$$\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i \;:=\; \sup\{f(x) \mid \widetilde{t}_{i-1} \le x \le \widetilde{t}_i\} \;-\; \inf\{f(x) \mid \widetilde{t}_{i-1} \le x \le \widetilde{t}_i\} \;<\; \varepsilon$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\inf_{P\in Z([a,b])} \mathcal{O}_G(f,P) - \sup_{P\in Z([a,b])} \mathcal{U}_G(f,P) &\leq \mathcal{O}_G(f,\widetilde{P}) - \mathcal{U}_G(f,\widetilde{P}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{M}_i - \widetilde{m}_i)\Big(G(\widetilde{t}_i) - G(\widetilde{t}_{i-1})\Big) \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Big(G(\widetilde{t}_i) - G(\widetilde{t}_{i-1})\Big) \\ &= \Big(G(b) - G(a)\Big)\,\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.133}$$

Dabei haben wir benutzt, dass G monoton steigend ist (also $G(\widetilde{t}_i) - G(\widetilde{t}_{i-1}) \geq 0$) und dass $\sum_{i=1}^{n} \Big(G(\widetilde{t}_i) - G(\widetilde{t}_{i-1})\Big)$ eine Teleskop-Summe ist:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} \Big(G(\widetilde{t}_i) - G(\widetilde{t}_{i-1})\Big) \\ &= \Big(G(\widetilde{t}_n) - G(\widetilde{t}_{n-1})\Big) + \Big(G(\widetilde{t}_{n-1}) - G(\widetilde{t}_{n-2})\Big) + \Big(G(\widetilde{t}_{n-2}) - G(\widetilde{t}_{n-3})\Big) \\ &\quad + \ldots + \Big(G(\widetilde{t}_2) - G(\widetilde{t}_1)\Big) + \Big(G(\widetilde{t}_1) - G(\widetilde{t}_0)\Big) \\ &= G(\widetilde{t}_n) - G(\widetilde{t}_0) = G(b) - G(a). \end{aligned} \tag{1.134}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt aus (1.133)

$$\inf_{P\in Z([a,b])} \mathcal{O}_G(f,P) = \sup_{P\in Z([a,b])} \mathcal{U}_G(f,P)$$

□

1.5.5 Aufgabe: Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \text{ und,} \\ 1 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases} \tag{1.135}$$

Berechnen Sie das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f(x)\, dG(x). \tag{1.136}$$

Das Riemann-Stieltjes-Integral ist eng mit dem Riemann-Integral verwandt, wie der folgende Satz zeigt.

1.5.6 Satz: Ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend und stetig differenzierbar und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = \int_a^b f(x)\, G'(x)\, dx. \tag{1.137}$$

Wir verzichten hier auf einen Beweis.

1.5.7 Aufgabe: Die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{erf}(t) = \int_0^t e^{-x^2}\, dx \tag{1.138}$$

hat keine einfache Darstellung in elementaren Funktion (siehe Beispiel 1.2.4). D. h. , dass Sie sich nicht als einfache Kombination von Funktionen wie z. B. Polynome oder trigonometrische Funktionen darstellen läßt.

Zeigen Sie, dass das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_0^t e^{-x^2}\, dG(x) \tag{1.139}$$

mit

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \text{ und} \\ -x^2 & \text{falls } x < 0 \end{cases} \tag{1.140}$$

eine einfache Darstellung hat. Berechnen Sie dazu das Integral.

Man kann das Riemann-Stieltjes-Integral auch für gewisse nicht monoton wachsende Funktionen G definieren.
In der Abschätzung (1.133) ergibt sich dann

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} |G(t_i) - G(t_{i-1})|. \tag{1.141}$$

Für die Existenz des Integrals muss man daher fordern, dass

$$\sup_{P \in Z([a,b])} \sum_{i=1}^{n} |G(t_i) - G(t_{i-1})| \leq C < \infty. \tag{1.142}$$

Funktionen G, die (1.142) erfüllen, nennt man Funktionen von **beschränkter Variation**. Wegen (1.134) sind monoton wachsende Funktionen $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ immer von beschränkter Variation.

Wir wollen uns zum Abschluss dieses Kapitels noch mit dem Riemann-Integral im mehrdimensionalen Raum beschäftigen. D. h. wir möchten Funktionen von mehreren Variablen integrieren können.
Sei etwa $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine Funktion von zwei Variablen $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$. Eine Möglichkeit, das Integral von f zu definieren, besteht darin zunächst eine Variable, etwa $x \in [a,b]$, festzuhalten und über die andere Variable zu integrieren. Wir erhalten dann eine Funktion

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy. \tag{1.143}$$

Diese Funktion integrieren wir anschließend über x:

$$\int_a^b F(x)\,dx. \tag{1.144}$$

Das Ergebnis nennen wir das (mehrdimensionale) **Riemann-Integral** von f über $[a,b] \times [c,d]$ und schreiben

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx. \tag{1.145}$$

Dieses Verfahren bedarf noch einer genaueren Begründung!

Erstens müssen wir sicherstellen, dass die Funktion

$$f_x : [c,d] \to \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x,y) \tag{1.146}$$

für jedes $x \in [a,b]$ Riemann-integrierbar ist und zweitens, dass die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_c^d f_x(y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy \tag{1.147}$$

ebenfalls Riemann-integrierbar ist.
Die Riemann-Integrierbarkeit von f_x und F kann man jedenfalls für stetige Funktionen f sicherstellen:

1.5.8 Proposition: Ist die Funktion $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind auch die Funktionen

$$f_x(y) = f(x,y) \quad \text{(für alle } x \in [a,b]) \tag{1.148}$$

und

$$F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy \;=\; \int_a^b f_x(y)\,dy \tag{1.149}$$

stetig.

> Für diejenigen unter Ihnen, die „Stetigkeit“ und „Gleichmäßige Stetigkeit“ für Funktionen $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ noch nicht kennen, verweisen wir auf den Abschnitt 2.4, wo wir diese Begriffe entwickeln. Diese Kursteilnehmer können den folgenden Beweis zurückzustellen, bis sie das zweite Kapitel des vorliegenden Kurses bearbeitet haben.

Beweis: Stetigkeit von f bedeutet, dass aus $x_n \to x_0$ und $y_n \to y_0$ folgt, dass $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$. Insbesondere folgt also für festes x_0, dass aus $y_n \to y_0$ folgt $f(x_0, y_n) \to f(x_0, y_0)$. D. h. die Funktion f_{x_0} ist für jedes $x_0 \in [a, b]$ stetig.

Da f auf der kompakten Menge $K = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ stetig ist, ist f sogar gleichmäßig stetig (Satz 2.4.32, siehe auch Satz 1.1.35). Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ mit:

$$\text{Aus } \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < \delta \text{ folgt } |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Ist nun $|x_1 - x_2| < \delta$, dann ist für jedes $y \in [c, d]$ auch $\|(x_1, y) - (x_2, y)\| < \delta$, also folgt $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon$ (für beliebiges $y \in [c, d]$).

Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Big| F(x_1) - F(x_2) \Big| &= \Big| \int_c^d f(x_1, y)\, dy - \int_c^d f(x_2, y)\, dy \Big| \\ &\le \int_c^d |f(x_1, y) - f(x_2, y)|\, dy \\ &\le (d - c)\, \varepsilon. \end{aligned}$$

D. h., F ist stetig. □

Damit haben wir für stetige Funktionen $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ das Riemann-Integral

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \tag{1.150}$$

definiert.
Als Nächstes stellt sich die Frage, ob das Ergebnis von der Reihenfolge der Integrale abhängt, ob also:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \;=\; \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \tag{1.151}$$

gilt. Tatsächlich *gilt* Gleichung (1.151) für alle stetigen Funktionen f. Einen elementaren Beweis hierfür findet man im Buch Analysis II von *Forster*. Wir verzichten hier auf einen Beweis von (1.151), weil wir diesen Sachverhalt später im viel allgemeineren Rahmen zeigen werden.

Für Funktionen von d Variablen, also $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ können wir ganz analog ein d-dimensionales Riemann-Integral definieren, in dem wir nach und nach über alle Variablen integrieren, indem wir also

$$\int_{a_1}^{b_1} \Big(\int_{a_2}^{b_2} (\dots \Big(\int_{a_{d-1}}^{b_d-1} \Big(\int_{a_d}^{d} f(x_1, \dots, x_d)\, dx_d \Big)\, dx_{d-1} \Big)\ \dots \Big)\, dx_2 \Big)\, dx_1 \tag{1.152}$$

bilden. Im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie werden wir solche Integrale in allgemeinem Rahmen untersuchen.

1.5.9 Aufgabe: Berechnen Sie

$$\int_1^2 \int_0^2 x + 2\,x^2 y + y^3\, dy\, dx. \tag{1.153}$$

Lösungen zu Kapitel 1

Lösung zur Aufgabe 1.1.20. Wir nehmen an, dass $a, b \in M$ gilt. Falls dies nicht der Fall ist, erweitern wir die Menge M durch die Elemente a und b. M ist dann immer noch eine endliche Menge und f eingeschränkt auf $[a, b] \setminus M$ ist stetig.

Betrachten wir die Partition $P_M = \langle t_0 = a, t_1, \ldots, t_l = b \rangle$ von $[a, b]$, wobei t_k, $k = 0, \ldots, l$, die angeordneten Elemente von M sind und l die Anzahl der Elemente von M bezeichnet.

Bezeichne mit f_k die Einschänkung von f auf das Interval $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, l$. Dann ist jedes f_k beschränkt und f_k eingeschränkt auf beliebige Intervalle $[c, d] \subset (t_{k-1}, t_k)$ stetig. Satz 1.1.14 zeigt, dass f_k auf $[t_{k-1}, t_k]$ Riemann-integrierbar sind.

Zusammenfassend haben wir bis jetzt gezeigt, dass f auf allen Intervallen $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, l$ Riemann-integrierbar ist. Sukzessives Anwenden von Satz 1.1.11 zeigt dann, dass f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist. Es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x)\,dx + \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{t_{l-1}}^{t_l} f(x)\,dx.$$

Lösung zur Aufgabe 1.1.23. Die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ wurde im Beweis von Satz 1.1.21 für die Ungleichung

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_c^d f(x)dx$$

verwendet. Unter Verwendung von Satz 1.1.11 und Korollar 1.1.13 zeigen wir

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^d f(x)dx + \int\limits_d^b f(x)dx \qquad \text{(Satz 1.1.11)}$$

$$\geq 0 + \int_c^d f(x)dx + 0 \qquad (f(x) \geq 0 \text{ und Korollar 1.1.13})$$
$$= \int_c^d f(x)dx.$$

Lösung zur Aufgabe 1.1.34. Wir untersuchen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

auf gleichmäßige Stetigkeit.

Als erstes notieren wir die Identität

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| = |x-y||x+y|, \tag{1.154}$$

die aus der dritten binomischen Formel folgt.

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x = n$ und $y = n + \frac{1}{n}$. Somit ist $|x-y| = \frac{1}{n}$ und $|x+y| = 2n + \frac{1}{n}$. Eingesetzt in (1.154) erhalten wir

$$|f(x) - f(y)| = |x-y||x+y| = \frac{1}{n}\left(2n + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Nun können wir zeigen, dass f nicht gleichmäßig stetig ist: Sei $\varepsilon = 1$. Für jedes $\delta > 0$ wähle ein $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{\delta} < n$ ist. Somit gilt

$$|x - y| = \frac{1}{n} < \delta.$$

Andererseits ist

$$|x^2 - y^2| > 2 > 1 = \varepsilon.$$

Dies widerspricht der gleichmäßigen Stetigkeit in Definition 1.1.32.

(„Durch Widerspruch“ wird auch im Beweis vom Satz 1.1.35 argumentiert.)

Lösung zur Aufgabe 1.2.10. Wir berechnen

$$\int_{10}^{20} \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx = \int_{10}^{20} \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma}\, dx$$

mit $\beta = -1$ und $\gamma = -2$. Da $D = \gamma - \frac{\beta^2}{4} = -2 - \frac{(-1)^2}{4} = -\frac{9}{4}$ negativ ist, hat das Polynom $P(x) = x^2 + \beta x + \gamma = x^2 - x - 2$ zwei verschiedene (reelle) Nullstellen

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{\beta}{2} + \sqrt{-D} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = 2 \qquad \text{und} \\ x_2 &= -\frac{\beta}{2} - \sqrt{-D} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = -1. \end{aligned}$$

Mit (1.33) berechnen wir nun das Integral und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{10}^{20} \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx &= \frac{1}{x_1 - x_2} \log\left(\frac{(20 - x_1)(10 - x_2)}{(20 - x_2)(10 - x_1)}\right) \\ &= \frac{1}{2 - (-1)} \log\left(\frac{(20 - 2)(10 - (-1))}{(20 - (-1))(10 - 2)}\right) \\ &= \frac{1}{3} \log\left(\frac{18 \cdot 11}{21 \cdot 8}\right) \\ &= \frac{1}{3} \log\left(\frac{198}{168}\right) = \frac{1}{3} \log\left(\frac{33}{28}\right). \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 1.2.11. Um

$$\int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2}\, dx$$

zu berechnen, substituieren wir $y = x + \frac{\beta}{2}$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2}\, dx &= \int_{a+\frac{\beta}{2}}^{b+\frac{\beta}{2}} \frac{1}{y^2}\, dy \qquad (\text{mit } y = x + \frac{\beta}{2}) \\ &= -\frac{1}{y}\Big|_{a+\frac{\beta}{2}}^{b+\frac{\beta}{2}} \qquad (\text{mit } (1.37)) \\ &= -\frac{1}{b + \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{a + \frac{\beta}{2}} \\ &= \frac{b - a}{ab + (a + b)\frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4}}. \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 1.2.13. Wir verwenden eine schlaue Darstellung des Integranden, um das Integral zu berechnen.

Zunächst betrachten wir die triviale Identität

$$\int_a^b \log x \, dx = \int_a^b 1 \cdot \log x \, dx.$$

Die rechte Darstellung suggeriert die Verwendung von Satz 1.2.6, also der partiellen Integration unter Verwendung von

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x, & f'(x) &= \frac{1}{x} \quad \text{und} \\ g'(x) &= 1, & g(x) &= x. \end{aligned}$$

Satz 1.2.6 impliziert also

$$\begin{aligned} \int_a^b \log x \, dx &= \int_a^b 1 \cdot \log x \, dx \\ &= \int_a^b g'(x) \, f(x) \, dx \\ &= g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx \\ &= b \log b - a \log a - \int_a^b \frac{1}{x} x \, dx \\ &= b \log b - a \log a - \int_a^b 1 \, dx \\ &= b \log b - a \log a - b + a \\ &= x \log x - x \Big|_a^b . \end{aligned}$$

Lösung zur Aufgabe 1.3.14. Aus MA 11.2.47 folgt, dass wir ein Beispiel der folgenden Form suchen: Sei $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ eine Menge von Zahlen für die $a_i < S$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, aber $\sup_{i \in \mathbb{N}} a_i = S$.

Betrachten wir nun $a_i = -\frac{1}{i}$ und $S = 0$. Dann ist $a_i < 0 = S$ für alle $i \in \mathbb{N}$, da die a_i's negative Zahlen sind.

Andererseits gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein (eventuell sehr großes) $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{und somit} \quad S - \varepsilon < -\frac{1}{n}$$

ist. Somit ist $S = 0$ eine obere Schranke aller Zahlen in der Menge A und $S - \varepsilon$ ist keine obere Schanke mehr (für jedes $\varepsilon > 0$). Laut MG 11.2.47 ist S das Supremum von A.

Um zusammenzufassen: Wir haben ein Beispiel für

$$a_i < S \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \sup_{i \in \mathbb{N}} a_i = S$$

gefunden.

Lösung zur Aufgabe 1.3.21. Beginnen wir mit dem Beweis der Ungleichung (1.77):

Aus MG 11.2.47 folgt, dass $f(y) \leq \sup_{x \in M} f(x)$ und $g(y) \leq \sup_{x \in M} g(x)$ für alle $y \in M$ ist. Aufaddieren beider Ungleichung gibt

$$f(y) + g(y) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x) \quad \text{für alle } y \in M.$$

Somit ist

$$\sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$$

eine obere Schranke der Menge $\{f(y) + g(y) \mid y \in M\}$. Da

$$\sup_{x \in M} \Big(f(x) + g(x) \Big)$$

die kleinste obere Schranke von $\{f(y) + g(y) \mid y \in M\}$ ist, gilt

$$\sup_{x \in M} \Big(f(x) + g(x) \Big) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x)$$

Analog beweist man die Ungleichung in (1.78).

Beweisen wir die Ungleichung (1.79): $\inf_{x \in M} h(x) \geq - \sup_{x \in M} |h(x)|$.

MG 11.2.51 zeigt

$$\inf_{x \in M} h(x) = - \sup_{x \in M} -h(x).$$

Wir müssen nun zeigen, dass

$$\sup_{x \in M} \Big(-h(x) \Big) \leq \sup_{x \in M} |h(x)|$$

gilt. Dies folgt aus folgender Überlegung: Da $-h(x) \leq |h(x)|$ gilt, ist

$$\sup_{x \in M} |h(x)|$$

eine obere Schranke der Menge $\{-h(y) \mid y \in M\}$.

$$\sup_{x\in M} \Big(- h(x) \Big)$$

ist die kleinste obere Schranke dieser Menge. Somit muss

$$\sup_{x\in M} -h(x) \leq \sup_{x\in M} |h(x)|$$

gelten.

Betrachten wir als Beispiel die Funktionen

$$f(x) = x, \quad g(x) = -x \quad \text{und} \quad h(x) = x + 1$$

mit $M = [-1, 1]$. Dann ist

$$\sup_{x\in M} f(x) = 1, \quad \sup_{x\in M} g(x) = 1, \quad \inf_{x\in M} f(x) = -1 \quad \text{und} \quad \inf_{x\in M} g(x) = -1.$$

Wir haben jedoch

$$\begin{aligned} \sup_{x\in M} \Big(f(x) + g(x)\Big) &= \sup_{x\in M} 0 = 0 \qquad \text{und} \\ \inf_{x\in M} \Big(f(x) + g(x)\Big) &= \inf_{x\in M} 0 = 0. \end{aligned}$$

Außerdem finden wir

$$0 = \inf_{x\in[-1,1]} x + 1 = \inf_{x\in M} h(x) > -\sup_{x\in M} |h(x)| = -\sup_{x\in[-1,1]} |x + 1| = -2.$$

Lösung zur Aufgabe 1.4.10. Wir beweisen Korollar 1.4.9 durch „Widerspruch“. Angenommen, es existierten Funktionen $f, h : [a, b) \to \mathbb{R}$, $0 \leq h(x) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b)$, beide Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a, d] \subset [a, b)$ und $\int_a^{b-} h(x)\, dx = \infty$. Außerdem gilt

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx < \infty.$$

Dann sind insbesondere die Voraussetzungen von Satz 1.4.8 erfüllt (mit vertauschten Rollen von f und h). Somit ist h uneigentlich Riemann-integrierbar:

$$\int_a^{b-} h(x)\, dx < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $\int_a^{b-} h(x)\,dx = \infty$.

Dieser Widerspruch wird dadurch aufgelöst, dass die Annahme „f ist uneigentlich Riemann-integrierbar“ falsch ist. Die Funktion f ist nicht uneigentlich Riemann-integrierbar:

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx = \infty.$$

Lösung zur Aufgabe 1.4.12. Wir betrachten zunächst die Funktionnen

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto e^x \quad \text{und} \\ &g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto -x^2 \quad \text{mit} \quad g'(x) = -2x. \end{aligned}$$

Mit der Substitutionsregel Satz 1.2.7 gilt dann

$$\begin{aligned} \int_0^b (-2)x\, e^{-x^2}\,dx &= \int_0^b g'(x)\, f\big(g(x)\big)\,dx \\ &= \int_{g(0)}^{g(b)} f(u)\,du \\ &= \int_0^{-b^2} e^u\,du \\ &= e^{-b^2} - e^0 \qquad \text{(Tabelle 1.2.5)} \\ &= e^{-b^2} - 1 \end{aligned} \tag{1.155}$$

für jedes $b > 0$. Analog gilt

$$\int_b^0 (-2)x\, e^{-x^2}\,dx = 1 - e^{-b^2} \tag{1.156}$$

für jedes $b < 0$.

Dies impliziert

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |x|\, e^{-x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b |x|\, e^{-x^2}\,dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{2} \int_0^b (-2)x\, e^{-x^2}\,dx \quad (\text{da } x = |x| \text{ für alle } 0 \le x \le b) \\ &= \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{2} \Big(e^{-b^2} - 1\Big) \quad \Big(\text{mit (1.155)}\Big) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

da $\lim_{b\to\infty} \frac{-1}{2} e^{-b^2} = 0$ ist. Auf ähnlichmn Weg erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} |x|\, e^{-x^2}\, dx &= \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} |x|\, e^{-x^2}\, dx \\
&= \lim_{b\to-\infty} \frac{1}{2} \int_{b}^{0} (-2)x\, e^{-x^2}\, dx \quad (\text{da } -x = |x| \text{ für alle } b \le x \le 0) \\
&= \lim_{b\to-\infty} \frac{1}{2} \left(1 - e^{-b^2}\right) \quad \text{mit } (1.156) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Definition 1.4.5 finden wir

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} |x|\, e^{-x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, e^{-x^2}\, dx$ existiert.

Lösung zur Aufgabe 1.4.14. Sei $a_j \ge 0$ für alle j. Angenommen, die Reihe $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ erfüllt

$$
\sum_{j=1}^{\infty} a_j \neq \infty.
$$

Dann existiert ein $R \ge 0$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j < R.
$$

Somit ist die Folge S_n beschränkt: $0 \le S_n < R$. Aus dem Monotonieprinzip MG 12.5.2 folgt, dass die Folge $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ konvergiert. Somit konvergiert die Reihe $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Lösung zur Aufgabe 1.4.17. Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Proposition 1.4.15.

Wir definieren die Funktion $g : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = a_n \qquad \text{falls } x \in [n, n+1).$$

g ist eine Funktion, die zwischen zwei natürlichen Zahlen konstant ist und an den natürlichen Zahlen Sprünge macht.
Laut Satz 1.1.19 ist g daher auf jedem Intervall $[1, k], (k > 1)$ Riemann-integrierbar.
Es gilt

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ für } x \geq M.$$

Nach Korollar 1.4.9 ist g auf $[M, \infty)$ und somit auch auf $[1, \infty)$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar.
Nach Definition von g gilt:

$$\int_n^{n+1} g(x)dx = a_n \quad \text{also} \quad \int_1^{N+1} g(x)dx = \sum_{j=1}^{N} a_j$$

und daher

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_j &= \lim_{N\to\infty} \int_1^{N+1} g(x)dx \\ &= \int_1^{\infty} g(x)dx \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Also divergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Lösung zur Aufgabe 1.4.19. Betrachten wir den Fall $\beta > 1$. $F_\beta : [3, \infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F_\beta(x) = \frac{-1}{(\beta - 1)(\log(x-1))^{\beta-1}}$$

hat die Ableitung F'_β mit

$$F'_\beta(x) = \frac{1}{(x-1)(\log(x-1))^{\beta}}.$$

Dann ist für alle $x \geq 3$

$$a_n = \frac{1}{n(\log n)^\beta} \leq \frac{1}{(x-1)(\log(x-1))^\beta} = F'_\beta(x) \quad \text{für } x \in [n, n+1).$$

Da $\int_3^\infty F'_\beta(x)\,dx$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_3^\infty F'_\beta(x)\,dx = F_\beta(3) = \frac{-1}{(\beta-1)(\log 3)^{\beta-1}} < \infty,$$

folgt aus Proposition 1.4.15, dass die Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,(\log n)^\beta}$ konvergiert.

Betrachten wir $\beta = 1$. Die Funktion $G_1 : [20,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G_1(x) = \log(\log x)$$

hat die Ableitung

$$G'_1(x) = \frac{1}{x\log x}.$$

Es gilt nun für alle $x \geq 20$ die Abschätzung

$$a_n = \frac{1}{n(\log n)} \geq \frac{1}{x\log x} = G'_1(x) \quad \text{für } x \in [n, n+1).$$

Da $\int_{20}^\infty G'_1(x)\,dx = \infty$ folgt mit Korollar 1.4.16

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,(\log n)} = \infty.$$

Betrachten wir $0 < \beta < 1$. Die Funktion $G_\beta : [2,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G_\beta(x) = \frac{-1}{(\beta-1)(\log x)^{\beta-1}}$$

hat die Ableitung

$$G'_\beta(x) = \frac{1}{x(\log x)^\beta}.$$

Es gilt nun für alle $x \geq 2$ die Abschätzung

$$a_n = \frac{1}{n(\log n)} \geq \frac{1}{x(\log x)^\beta} = G'_\beta(x) \quad \text{für } x \in [n, n+1).$$

Da $\int_2^\infty G'_\beta(x)\,dx = \infty$ folgt mit Korollar 1.4.16

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,(\log n)^\beta} = \infty.$$

Lösung zur Aufgabe 1.5.5.

1. Fall $0 \notin [a, b]$:
   G ist eine (auf $[a, b]$) konstante Funktion mit

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } b < 0, \\ 1 & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Insbesondere gilt für jede Partition $P = \langle t_0, \ldots, t_n \rangle \in Z\big([a, b]\big)$, dass $G(t_{i-1}) = G(t_i)$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_G(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1})\Big) \\ &= 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_G(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1})\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

wobei – wie immer –

$$m_i = \inf_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x) \quad \text{und} \quad M_i = \sup_{t_{i-1} \leq x \leq t_i} f(x)$$

ist.

Also ergibt sich

$$\mathcal{U}_G(f, P) = \mathcal{O}_G(f, P) = 0.$$

Nach Definition 1.5.3 hat das Rieman-Stieltjes-Integral den Wert

$$\int_a^b f(x)\, dG(x) = 0.$$

2. Fall $0 \in (a, b)$:
   Sei $\varepsilon > 0$. f ist als stetige Funktion auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig (Satz 1.1.17). Somit existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ ist für alle $|x - 0| < \delta$, $x \in [a, b]$.

   Für jede Partition $P_0 = \langle a = t_0, \ldots, t_{i_0}, \ldots, t_n = b \rangle \in Z\big([a, b]\big)$, für die $0 \in (t_{i_0-1}, t_{i_0}]$ und $|t_{i_0} - t_{i_0-1}| < \delta$ ist, gilt somit (mit Lemma 1.3.19 und $g(x) = f(0)$)

$$m_{i_0} \geq f(0) - \varepsilon \quad \text{und} \quad M_{i_0} \leq f(0) + \varepsilon.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_G(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1})\Big) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{i_0-1} m_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1})\Big)\right) \\
&\quad + m_{i_0} \Big(G(t_{i_0}) - G(t_{i_0-1})\Big) \\
&\quad + \left(\sum_{i=i_0+1}^{n} m_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1})\Big)\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{i_0-1} m_i(0-0)\right) + m_{i_0}\,(1-0) + \left(\sum_{i=i_0+1}^{n} m_i(1-1)\right) \\
&= 0 + m_{i_0} + 0 \\
&= m_{i_0} \\
&\geq f(0) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\mathcal{O}_G(f,P) \leq f(0) + \varepsilon.$$

Somit finden wir

$$0 \leq \mathcal{O}_G(f,P) - \mathcal{U}_G(f,P) \leq (f(0)+\varepsilon) - (f(0)-\varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

Da wir $\varepsilon > 0$ beliebig nahe an 0 wählen können, muß

$$\mathcal{O}_G(f,P) = \mathcal{U}_G(f,P) = f(0)$$

gelten. Somit hat das Rieman-Stieltjes-Integral nach Definition 1.5.3 den Wert

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = f(0).$$

3. Fall $a = 0$:

Für jede Partition $P_0 = \langle 0 = t_0, \ldots, t_n = b\rangle \in Z\Big([0,b]\Big)$, gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_G(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Big(G(t_i) - G(t_{i-1})\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_i\,(1-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und analog

$$\mathcal{O}_G(f,P) = 0.$$

Das Rieman-Stieltjes-Integral hat somit den Wert

$$\int_0^b f(x)\,dG(x) = 0.$$

4. Fall $b = 0$:
Für jede Partition $P_0 = \langle a = t_0, \ldots, t_n = 0\rangle \in Z\big([a,0]\big)$, gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_G(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\left(G(t_i) - G(t_{i-1})\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\left(G(t_i) - G(t_{i-1})\right)\right) + m_n\left(G(t_n) - G(t_{n-1})\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\,(0-0)\right) + m_n\,(1-0)\\
&= m_n.
\end{aligned}$$

Analog finden wir

$$\mathcal{U}_G(f,P) = M_n.$$

Wie im Fall 2 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für Partitionen, die $|t_n - t_{n-1}| < \delta$ erfüllen, gilt (beachte: $b = 0$)

$$m_n \geq f(0) - \varepsilon \quad \text{und} \quad M_n \leq f(0) + \varepsilon.$$

Somit finden wir

$$0 \leq \mathcal{O}_G(f,P) - \mathcal{U}_G(f,P) \leq (f(0)+\varepsilon) - (f(0)-\varepsilon) \leq 2\varepsilon.$$

Wie im Fall 2 folgt

$$\mathcal{O}_G(P,f) = \mathcal{U}_G(P,f) = f(0)$$

und somit

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = f(0).$$

Wir haben also

$$\int_a^b f(x)\,dG(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \notin (a,b] \text{ und} \\ f(0) & \text{falls } 0 \in (a,b] \end{cases}$$

gezeigt.

Lösung zur Aufgabe 1.5.7. Zunächst berechnen wir die Ableitung von G:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \begin{cases} 2x & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ und} \\ -2x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \\ &= |2x|. \end{aligned}$$

Somit ist G stetig differentierbar. G ist ausserdem monoton steigend, da G' nicht-negativ ist.

Die Voraussetzungen von Satz 1.5.6 sind erfüllt. Somit gilt

$$\begin{aligned} &\int_0^t e^{-x^2}\, dG(x) \\ &= \int_0^t e^{-x^2}\, G'(x)\, dx \\ &= \int_0^t |2x|\, e^{-x^2}\, dx \\ &= \begin{cases} \int_0^t 2x\, e^{-x^2}\, dx & \text{für } t \geq 0 \text{ und} \\ \int_0^t -2x\, e^{-x^2}\, dx & \text{für } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^t 2x\, e^{-x^2}\, dx & \text{für } t \geq 0 \text{ und} \\ \int_t^0 2x\, e^{-x^2}\, dx & \text{für } t < 0 \end{cases} \qquad \text{(Definition 1.1.8)} \\ &= \begin{cases} \int_0^{t^2} e^{-y}\, dy & \text{für } t \geq 0 \text{ und} \\ \int_{t^2}^0 e^{-y}\, dy & \text{für } t < 0 \end{cases} \qquad \text{(Substitution } y = x^2\text{)} \\ &= \begin{cases} -e^{-y}\Big|_0^{t^2} & \text{für } t \geq 0 \text{ und} \\ -e^{-y}\Big|_{t^2}^0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-t^2} & \text{für } t \geq 0 \text{ und} \\ e^{-t^2} - 1 & \text{für } t < 0 \end{cases} \\ &= \left|1 - e^{-t^2}\right|. \end{aligned}$$

Somit das Riemann-Stieltjes-Integral die einfache Darstellung

$$\int_0^t e^{-x^2}\, dG(x) = \left|1 - e^{-t^2}\right|.$$

Lösung zur Aufgabe 1.5.9. Die Funktion

$$f_x(y) = x + 2x^2y + y^3$$

hat die Stammfunktion

$$F_x(y) = xy + x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4,$$

da $F'_x(y) = f_x(y)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \int_0^2 x + x^2y + y^3\, dy\, dx &= \int_1^2 \int_0^2 f_x(y)\, dy\, dx \\
&= \int_1^2 \left[F_x(y)\Big|_0^2 \right] dx \\
&= \int_1^2 2x + 4x^2 + 4\, dx \\
&= x^2 + \frac{4}{3}x^3 + 4x\Big|_1^2 \\
&= 4 + \frac{4}{3}8 + 8 - \left(1 + \frac{4}{3} + 4\right) \\
&= \frac{49}{3} \qquad (\approx 16.333\ldots).
\end{aligned}$$