

# Kapitel 4

## Nichtstationäre Zeitreihen

### 4.1 ARIMA-Modelle

Die bisher diskutierten ARMA-Modelle sind bei geeigneter Wahl der Parameter stationär, d.h. wenn alle Wurzeln der Gleichung  $\phi(\lambda^{-1}) = 0$  betragsmäßig kleiner als Eins sind. Finanz- und makroökonomische Zeitreihen weisen jedoch häufig einen Trend und zeitlich variable Varianzen auf, so daß auch nichtstationäre Modelle von Interesse sind. Einerseits kann versucht werden, die Trends explizit zu modellieren ( $\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \exp(\alpha_2 t) + \dots$  etc.), andererseits kann man versuchen, durch Differenzenbildung die Trends zu beseitigen. Dies ist die Idee bei der ARIMA-Modellierung, wo ein differenzierter Prozeß als ARMA-Modell ausgedrückt wird.

Ist beispielsweise der logarithmierte Kurs  $y_t = \log S_t$  ein Random Walk, d.h.

$$\log S_t = \log S_{t-1} + \mu + \epsilon_t \quad (4.1)$$

so ist die Differenz

$$\log S_t - \log S_{t-1} = y_t - y_{t-1} := \nabla y_t = \mu + \epsilon_t \quad (4.2)$$

ein stationärer Prozeß (AR(0)).

Etwas allgemeiner nimmt man an, daß die  $d$ -te Differenz ARMA( $p, q$ ) ist, also ist die Differenz

$$\nabla^d y_t = u_t \quad (4.3)$$

$$\phi(B)u_t = \theta(B)\epsilon_t \quad (4.4)$$

bzw.

$$\phi(B)\nabla^d y_t = \theta(B)\epsilon_t. \quad (4.5)$$

Der so erhaltene Prozeß  $y_t$  wird als ARIMA( $p, d, q$ ) bezeichnet, also als integriert vom Grad  $d$ , und kann durch Differenzieren wieder in einen ARMA( $p, q$ )-Prozeß

ARIMA( $p, d, q$ )

zurückgeführt werden. Das Lag-Polynom  $\phi(B)\nabla^d = \phi(B)(1-B)^d := \tilde{\phi}(B)$  ist dann vom Grad  $p+d$  und die Gleichung  $\tilde{\phi}(z) = 0$  hat  $d$  Lösungen mit  $z = 1$ , sog. *Einheitswurzeln (unit roots)*

Einheits-  
wurzeln

$$\phi(z)(1-z)^d = 0. \quad (4.6)$$

Invertiert man den Differenzen-Operator  $1-B$ , so ergibt sich

$$S(B) = (1-B)^{-1} = 1 + B + B^2 + \dots \quad (4.7)$$

$$y_t = \nabla^{-d}u_t = \nabla^{-d+1}(1+B+B^2+\dots)u_t \quad (4.8)$$

$$= \nabla^{-d+1} \sum_{j=0}^{\infty} u_{t-j} \quad (4.9)$$

was zeigt, daß sich  $y_t$  durch  $d$ -fache Summation (Integration) aus  $u_t$  berechnet.

#### Beispiel 4.1 (Einfache Beispiele)

1. Random Walk:

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + \epsilon_t \quad (4.10)$$

$$\nabla y_t = \mu + (\phi - 1)y_{t-1} + \epsilon_t \quad (4.11)$$

d.h. für  $H_0 : \phi = 1$  (Einheitswurzel) ist der differenzierte Prozess AR(0). Als Lösung findet man den Random Walk mit Drift ( $y_0 = \text{fix}$ )

$$y_t = y_0 + \mu t + \sum_{j=1}^t \epsilon_j \quad (4.12)$$

$$E[y_t] = y_0 + \mu t \quad (4.13)$$

$$\text{Var}(y_t) = \sigma^2 t \quad (4.14)$$

der weder Mittelwerts- noch Varianz-Stationär ist.

2. ARMA( $p, q$ ) = ARIMA( $p, d = 0, q$ )
3. Es gelte  $\phi(B)y_t = \phi(B)(y_t + c)$ , d.h. die Dynamik des Kurses  $y_t$  hängt nicht von der absoluten Kurshöhe ab. Dann folgt  $\phi(B)c = \phi(1)c = 0 \Rightarrow \phi(1) = 0$ . Daher ist  $z = 1$  eine Lösung von  $\phi(z) = 0$  und  $y_t$  enthält eine Einheitswurzel (vgl. Mills, 1999, S. 46).
4. Modellierung eines ARIMA(1,1,0) in EVIEWS (Kommandos):  

```
series dy = D(y,1) ( = D(y) )
ls dy mu AR(1) (y_t - y_{t-1} ist AR(1); y_t ist ARIMA(1,1,0))
```

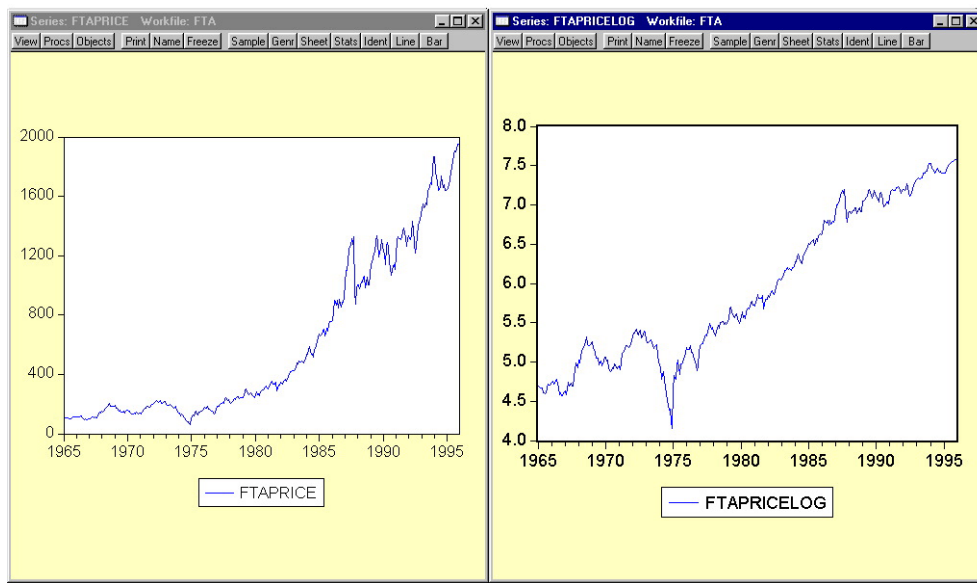


Abbildung 4.1: FTA-Index (links) und logarithmische Transformation (rechts). Monatliche Daten von 1965:1 - 1995:12

In konventioneller Schreibweise gilt also

$$\nabla y_t = \mu + u_t \quad (4.15)$$

$$(1 - \phi B)u_t = \epsilon_t \quad (4.16)$$

$$\nabla y_t = (1 - \phi)\mu + \phi \nabla y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (4.17)$$

d.h.  $\nabla y_t$  ist AR(1).

■

#### Beispiel 4.2 (ARIMA-Modellierung des FTA All Share Index)

Im folgenden wird der britische Aktienindex FTA (Financial Times Actuarial Index) analysiert (Datenquelle: <http://lboro.ac.uk/departments/ec/cup/>; vgl. Mills, 1999, S. 51). In Abb. (4.1) ist links der Index und rechts eine Log-Transformation zu sehen. Man sieht, daß dadurch eine Linearisierung und Varianz-Stabilisierung stattfindet. Die Log-Zeitreihe  $y_t = \log FTA_t$  wurde differenziert und ein AR(3)-Modell angepaßt, d.h.

FTA All  
Share Index

$$y_t - y_{t-1} = \log(FTA_t/FTA_{t-1}) = c + u_t \quad (4.18)$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \phi_3 B^3)u_t = \epsilon_t \quad (4.19)$$

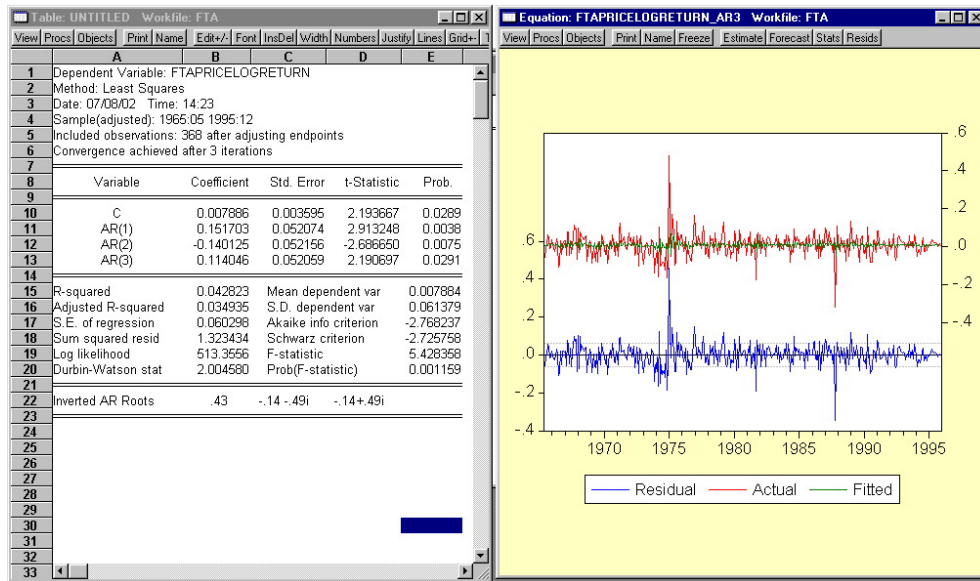


Abbildung 4.2: ARIMA(3,1,0)-Modell für  $\log(FTA_t)$ . Links Schätzergebnisse, rechts log>Returns, angepaßte Werte und Residuen.

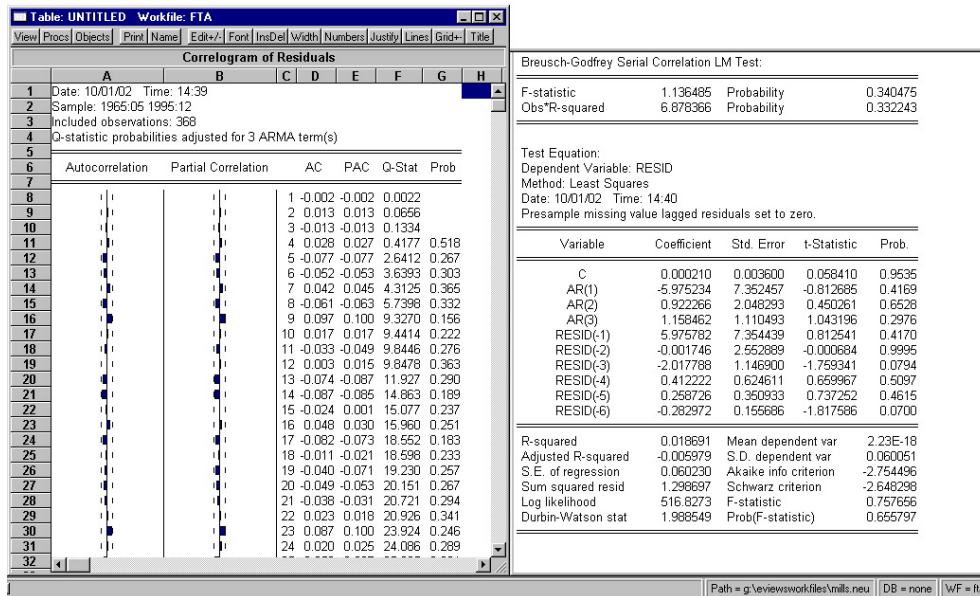


Abbildung 4.3: Autokorrelation der Residuen und  $Q$ -Statistik (links) und Breusch-Godfrey Residualtest (rechts).

Prognosen über den Zeitpunkt  $T$  hinaus können mit dem Kalman-Filter leicht vorgenommen werden, wenn man die Rekursion ohne Meß-Update fortsetzt, da ja für  $t > T$  keine neue Information vorliegt. Somit ergeben sich die Prognosen und Prognosefehler für Zustand und Messung

Prognose

Extrapolation  $t \geq T$ 

$$E(y_{t+1}|Z^T) = \mu_{t+1|t} = A_t \mu_{t|t} + b_t \quad (6.112)$$

$$\text{Var}(z_{t+1}|Z^T) = \Sigma_{t+1|t} = A_t \Sigma_{t|t} A_t' + \Omega_{t+1}. \quad (6.113)$$

$$\mu_{t+1|t+1} = \mu_{t+1|t} \quad (6.114)$$

$$\Sigma_{t+1|t+1} = \Sigma_{t+1|t} \quad (6.115)$$

$$E(z_{t+1}|Z^T) = H_{t+1} \mu_{t+1|t} + d_{t+1} \quad (6.116)$$

$$\text{Var}(z_{t+1}|Z^T) := \Gamma_{t+1} = H_{t+1} \Sigma_{t+1|t} H_{t+1}' + R_{t+1}. \quad (6.117)$$

Wenn die Parameter nur geschätzt vorliegen, setzt man diese in die Filtergleichungen ein.

Die Prognosegleichungen erhält man, wenn keine Messungen vorliegen und der Meß-Update übersprungen werden kann. Ähnliches gilt für das Vorliegen von fehlenden Werten (missing data). Wenn eine Messung  $z_s; s \in [0, T]$  nicht vorliegt, wird einfach der Meß-Update übersprungen und die Rekursion fortgesetzt. Man erhält somit Schätzungen der fehlenden Werte und eine einfache Berechnung der Likelihood-Funktion bei 'löchrigen' Datensätzen. Auch kann damit eine Modellierung auf feinerem Zeitraster vorgenommen werden: Man spezifiziert das Modell auf täglicher Basis, hat aber nur wöchentliche Messungen (etwa Freitag). Dann ergeben sich optimale Zustandsschätzungen für die restlichen Tage, da diese Werte als fehlend im Datensatz erscheinen.

missing data

### Beispiel 6.5 (Euro-Dollar-Kurs als Zustandsraum-Modell)

Das Regressionsmodell mit AR(2)-Fehlern aus Bsp. 4.8 (Abb. 4.18) läßt sich auch als Zustandsraum-Modell schreiben. Die EVIEWS-Spezifikation im StateSpace-Objekt Sspace: Statespace lautet:

```
@signal eurodollarstep = c(1) + c(2)*spread + sv1
@state sv1 = c(3)*sv1(-1) + c(4)*sv2(-1) + [ename = e1]
@state sv2 = sv1(-1)
@evar var(e1) = exp(c(5))
```

Dies bedeutet in unserer Terminologie, daß ein Zustandsvektor  $y_t' = [y_{1t}, y_{2t}] = [sv1_t, sv2_t]$  definiert wurde, der die Zustandsgleichung und Meßgleichung

$$\begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.118)$$

Sspace: STATESPACE  
Method: Maximum likelihood (Marquardt)  
Date: 05/11/04 Time: 11:57  
Sample: 11/10/1985 25/10/2002  
Included observations: 4446  
Valid observations: 4108  
Convergence achieved after 14 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	1.119620	0.112903	9.916677	0.0000
C(2)	-0.000816	0.001445	-0.564331	0.5725
C(3)	0.939802	0.000464	2026.596	0.0000
C(4)	0.058973	0.000955	61.78110	0.0000
C(5)	-9.665093	0.013269	-728.3959	0.0000

	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	-0.131810	0.032548	-4.049735	0.0001
SV2	-0.131962	0.031703	-4.162438	0.0000

Log likelihood	14033.01	Akaike info criterion	-6.829606
Parameters	5	Schwarz criterion	-6.821913
Diffuse priors	0	Hannan-Quinn criter.	-6.826882

Abbildung 6.1: ML-Schätzungen des State Space-Modells (siehe Text). Euro-Dollar-Kurs als lineare Funktion der Zinsdifferenz USD–DM. Autokorrelation 2. Ordnung

$$z_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \delta_1 + \delta_2 x_t \quad (6.119)$$

erfüllt ( $z_t = \text{eurodollarstep}_t; x_t = \text{spread}_t$ ). Die AR(2)-Spezifikation ist etwas anders als in Bsp. (6.1) - es wurden die Zeilen in umgekehrter Reihenfolge geschrieben.

*Übung:* Schreiben Sie das AR( $p$ )- bzw. ARMA( $p, q$ )-Modell aus Bsp. (6.1 - 6.2) in umgekehrter Reihenfolge der Zeilen auf.

Die Spezifikation @evar var(e1) = exp(c(5)) bedeutet, daß die Varianz  $\text{Var}(\epsilon_t) = \exp(\theta_5) > 0$  ist (Restriktion). Der Parametervektor lautet also  $\theta = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} = \{\delta_1, \delta_2, \phi_1, \phi_2, \theta_5\}$ . Die Resultate der ML-Schätzung sind in Abb. (6.1) gezeigt. Sie unterscheiden sich kaum von den Resultaten aus Bsp. (4.8), Abb. (4.18). Die ML-Methode erlaubt es (anders als NLLS), auf die Fehlervarianzen  $\text{Var}(\epsilon_t) = \Omega_t; \text{Var}(\delta_t) = R_t$  Restriktionen zu legen (etwa positiv definit). Abb. (6.2) zeigt die Einschnitt-Prädiktion des Signals (Euro-Dollar-Kurs) und die standardisierten Residuen  $\hat{v}_t^* = \hat{\Gamma}^{-1/2} \hat{v}_t$ . Abb. (6.3) zeigt die Filterlösung  $\hat{\mu}_{t|t} \pm 2\sqrt{\text{Diag}(\hat{\Sigma}_{t|t})}$  und ein approximatives 95%-Prognoseintervall für den geschätzten Zustand (beide Komponenten). Schließlich ist in Abb. (6.4) die prognostizierte Messung im Intervall 11/10/2000 - 25/10/2002 dargestellt, wobei die Prädiktions-

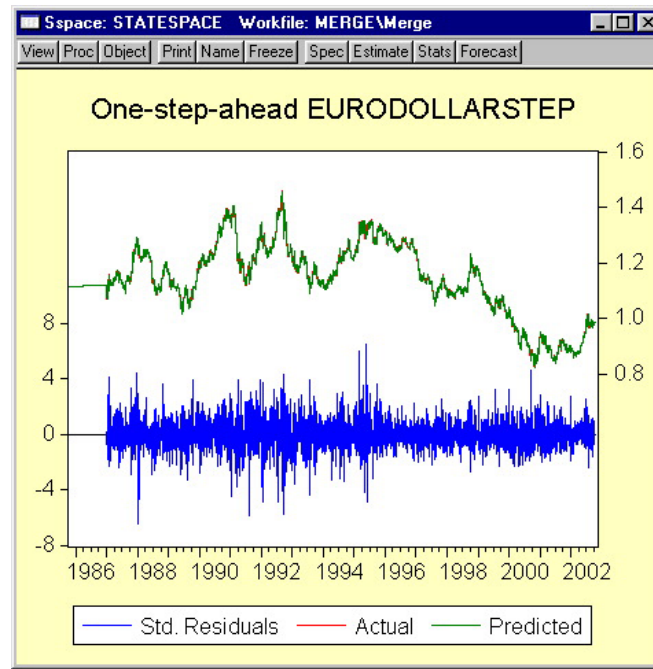


Abbildung 6.2: Ein-Schritt-Prädiktion  $\hat{z}_{t|t-1}$ , Messung  $z_t$  und standardisierte Residuen  $\hat{v}_t^* = \hat{\Gamma}^{-1/2}\hat{v}_t$

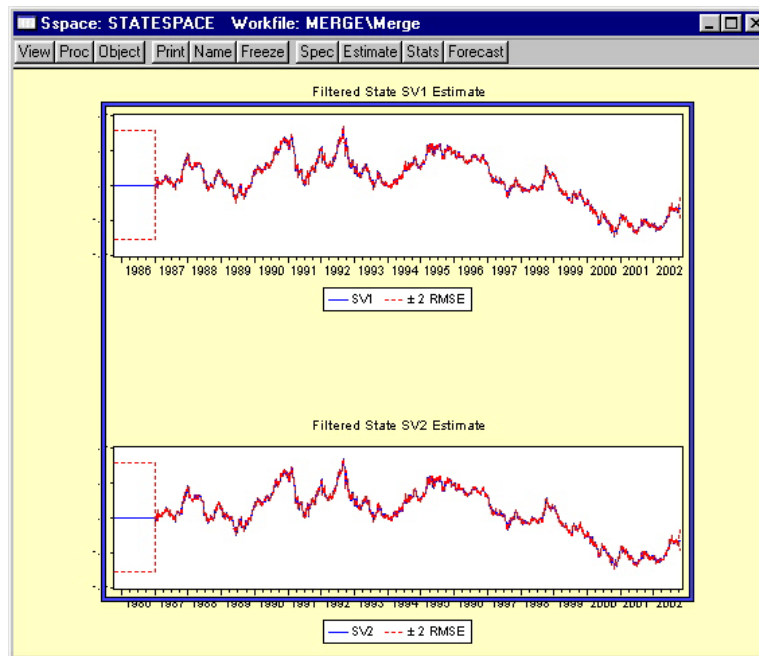


Abbildung 6.3: Gefilterter Zustand  $\hat{\mu}_{t|t} \pm 2\sqrt{\text{Diag}(\hat{\Sigma}_{t|t})}$  ausgewertet am ML-Schätzer  $\hat{\theta}$ .

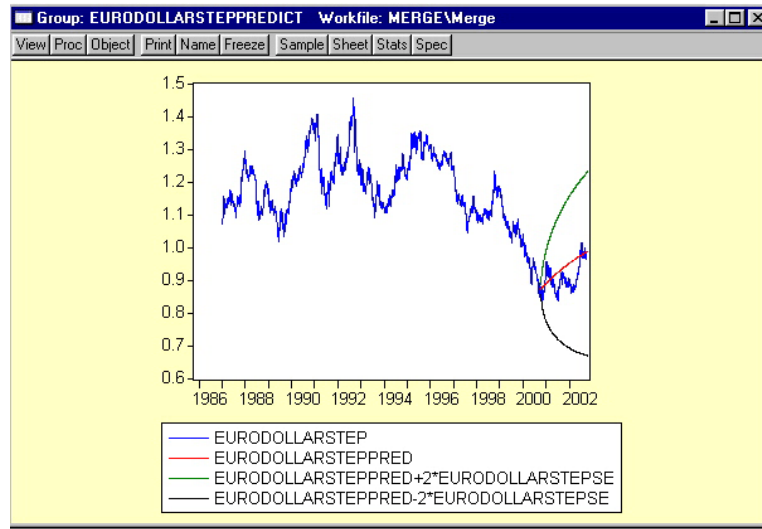


Abbildung 6.4: Prognose im Intervall 11/10/2000 - 25/10/2002: Filterlösung  $\hat{E}(z_t|Z^{t_0}) \pm 2\sqrt{\text{Diag}(\widehat{\text{Var}}(z_t|Z^{t_0}))}$  ausgewertet am ML-Schätzer  $\hat{\theta}$ .  $t_0 = 10/10/2000$ .

formeln (6.113) benutzt wurden. Der eingesetzte Parameterschätzer beruht in diesem Fall auf dem gesamten Datensatz 11/10/1985 - 25/10/2002.

■

### Beispiel 6.6 (Rekursive Schätzung eines Parameters)

Der Kalman-Filter kann zur rekursiven (sequentiellen) Schätzung eines Parameters benutzt werden. Hat man Zufallsvariablen

Rekursive  
Schätzung

$$z_t = \mu + \delta_t \sim N(\mu, R), i.i.d., \quad (6.120)$$

so ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\mu$  der Mittelwert  $\hat{\mu}_t = (t+1)^{-1} \sum_{i=0}^t z_i$ . Schreibt man

$$\hat{\mu}_t = \hat{\mu}_{t-1} + (t+1)^{-1}(z_t - \hat{\mu}_{t-1}) \quad (6.121)$$

$$= (t+1)^{-1}[t\hat{\mu}_{t-1} + z_t] \quad (6.122)$$

$$= (t+1)^{-1} \sum_{i=0}^t z_i, \quad (6.123)$$

so ist dies eine rekursive Berechnung des Mittelwerts. Die Form der Gleichung erinnert an den Kalman-Filter, wenn man  $K_t = (t+1)^{-1}$  als Kalman-Gain auffaßt und der Mittelwert  $\hat{\mu}_{t-1}$  die beste Prognose für den Meßwert  $z_t$  ist. In der Tat kann man diese Form aus dem Kalman-Filter herleiten, wenn man als System- und Meßgleichung

$$\mu_t = \mu_{t-1} \quad (6.124)$$

$$z_t = \mu_t + \delta_t \quad (6.125)$$