Gliederung

Leseprobe

KE 1 Grundlagen der Differential- und Integralrechnung

1. Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen

1.1 Grundlagen

Das Grundproblem der Differentialrechnung besteht darin, ein Maß für die lokale Änderung einer Funktion (in der Umgebung eines vorgegebenen Punktes) zu definieren und berechnen zu können. Wir verdeutlichen zunächst die Problemstellung an einem Beispiel.

Beispiel 1.1.1

In einem Unternehmen wird nur ein Gut produziert. Die Kosten für die Herstellung dieses Gutes lassen sich in Abhängigkeit von der jeweils produzierten Menge x mittels der Gesamtkostenfunktion $K(x)$ bestimmen. Momentan werden x_o Einheiten dieses Gutes produziert, wodurch Gesamtkosten in Höhe von $K(x_o)$ entstehen.

Infolge einer gestiegenen Nachfrage beabsichtigt der Unternehmer, die Produktion für dieses Gut zu erhöhen, wodurch natürlich auch höhere Gesamtkosten entstehen. Nun ist der Unternehmer primär nicht an der absoluten Höhe der Gesamtkosten interessiert, die durch die z. B. auf x_1 erhöhte Produktionsmenge verursacht werden, als vielmehr an der Veränderung ΔK der Gesamtkosten mit $\Delta K = K(x_1) - K(x_o)$. Um beispielsweise Anhaltspunkte für seine Preiskalkulation zu gewinnen, möchte der Unternehmer wissen, wie hoch bei einer Steigerung der Produktion von x_o auf x_1 Einheiten die (durchschnittlichen) Kosten pro zusätzlich gefertigter Einheit sind. Diese lassen sich bestimmen, indem man den Quotienten aus der Veränderung ΔK der Gesamtkosten und der Veränderung Δx der Ausbringungsmenge ($\Delta x = x_1 - x_o$) berechnet.

Für den Spezialfall einer *linearen* Gesamtkostenfunktion $K(x)$ ist bekannt, dass der Quotient $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ die Steigung der Gesamtkostenkurve angibt und dass ferner die Steigung m dieser Geraden gemäß

$$m = \frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{K(x_1) - K(x_o)}{x_1 - x_o} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

über dem gesamten Definitionsbereich konstant ist. Insbesondere spielt es keine Rolle, welche zwei Geradenpunkte $P_o = (x_o, K(x_o))$ und $P_1 = (x_1, K(x_1))$ man zur Berechnung der Geradensteigung heranzieht. Für eine lineare Gesamtkostenkurve gilt also: Die Kosten pro zusätzlich gefertigter Einheit betragen (konstant) m Geldeinheiten (GE), und zwar unabhängig davon, von welchem gegenwärtigen Produktionsniveau (hier gewählt: x_o) und in welchem Ausmaß Δx die Produktionserhöhung vorgenommen wird.

Für nichtlineare Gesamtkostenkurven trifft eine solche Aussage dagegen nicht zu. Abb. 1.1.1 veranschaulicht dies.

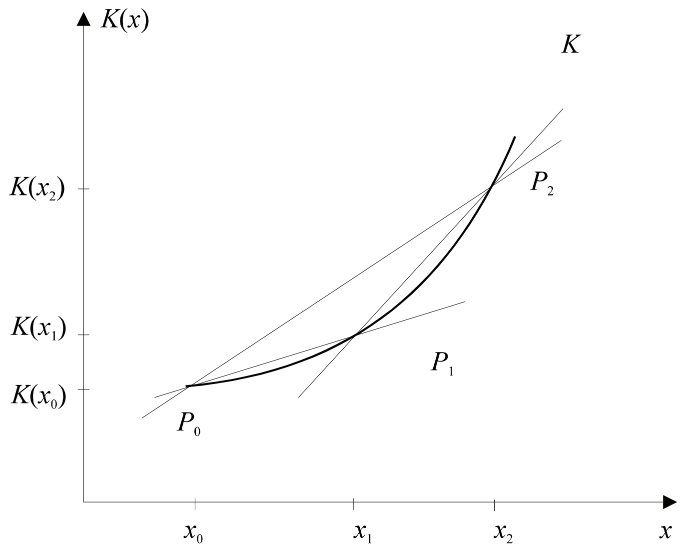

Abb. 1.1.1: Graph einer nichtlinearen Gesamtkostenfunktion K und verschiedene Sekanten

In Abb. 1.1.1 wurden die drei Punkte $P_o = (x_o, K(x_o))$, $P_1 = (x_1, K(x_1))$ und $P_2 = (x_2, K(x_2))$ jeweils paarweise durch Sekanten verbunden.

Die Steigung der jeweiligen Sekanten berechnet sich gemäß (1.1.1):

$$m_{P_oP_1} = \frac{K(x_1) - K(x_o)}{x_1 - x_o},$$

$$m_{P_oP_2} = \frac{K(x_2) - K(x_o)}{x_2 - x_o},$$

$$m_{P_1P_2} = \frac{K(x_2) - K(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Die jeweiligen Sekantensteigungen geben die durchschnittlichen Kosten pro zusätzlich gefertigter Einheit bei entsprechend gewähltem Produktionsniveau und der gewählten Produktionserhöhung an. Wir können aus Abb. 1.1.1 folgende Beobachtungen festhalten:

- Eine Steigerung der Produktionsmenge von x_0 auf x_2 verursacht höhere (durchschnittliche) Kosten pro zusätzlich gefertigter Einheit als eine Produktionssteigerung von x_0 auf x_1 ($m_{P_0P_2} > m_{P_0P_1}$). Der (durchschnittliche) Anstieg der Gesamtkosten hängt also vom Ausmaß Δx der Produktionssteigerung ab.

- Eine Steigerung der Produktionsmenge von x_1 auf x_2 verursacht höhere (durchschnittliche) Kosten pro zusätzlich gefertigter Einheit als eine um die gleiche Menge Δx vorgenommene Produktionserhöhung von x_0 auf x_1 ($m_{P_1P_2} > m_{P_0P_1}$). Der (durchschnittliche) Anstieg der Gesamtkosten hängt somit auch vom jeweiligen Ausgangspunkt der Produktionserhöhung, d. h. von x_1 bzw. x_0 ab.

[…]

2 Integralrechnung

[…]

2.4 Ökonomische Anwendungen

Stetig abgezinste Kapitalwerte

In der Kapitaltheorie und der Investitionsrechnung tritt häufig das Problem auf, für zukünftig zur Verfügung stehende Geldsummen den *Gegenwartswert*, d. h. den entsprechend auf den Zeitpunkt $t = 0$ abgezinsten Wert dieser Summe zu ermitteln. Geht man von einer jährlichen Verzinsung mit einem Zinssatz i aus, so ergibt sich für den Gegenwartswert W einer in einem Jahr zur Verfügung stehenden Summe S die Beziehung

Gegenwartswert

$$W = \frac{S}{1+i}.$$

Wenn die Summe erst in t Jahren fällig wird, gilt entsprechend

$$W = \frac{S}{(1+i)^t} \tag{2.4.1}$$

Dabei wird W auch als der *abdiskontierte Wert von S* bezeichnet.

abdiskontierter Wert

Wird der Zins n-mal jährlich anteilsmäßig berechnet, geht (2.4.1) in

$$W = \frac{S}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}}, \tag{2.4.2}$$

über, da nun nt-mal ein Zins zu einem Satz von i/n anzurechnen ist. Nimmt man stetig fließende Zinszahlungen an, so ist der Grenzwert von (2.4.2) für $n \to \infty$ zu berechnen. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n} = e^{i}$$

gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{i}}\right)^{\frac{n}{i}}\right)^{it} = e^{it}.$$

Der Gegenwartswert bei stetiger Verzinsung ist also

$$W = \frac{S}{e^{it}}. \tag{2.4.3}$$

Nach Auflösen der Gleichung nach S erhält man $S = We^{it}$, d. h. in Umkehrung der bisherigen Überlegungen ergibt ein bei stetiger Verzinsung mit Zinssatz i angelegtes Kapital W nach t Jahren den Betrag S.

[…]

KE 2 Einführung in die Lineare Algebra

[…]

5 Der n-dimensionale Vektorraum R^n

5.2 Dimension und Basis des R^n

[…]

Übungsaufgabe 5.2.1

Die Keksfabrik „Knack und Süß“ beliefert den Supermarkt „Schnellkauf“ mit verschiedenen Kekssorten und zwar mit Schokoladenkeksen, Butterkeksen, Vollkorngebäck und Waffeln.

Der Supermarkt benötigt pro Monat 500 Pakete Schokokekse, 1150 Packungen Butterkekse, 450 Pakete Vollkorngebäck, 200 Schachteln Waffeln. Aus packungstechnischen Gründen werden die Kekse in zwei verschiedenen Versandkartons geliefert, und zwar enthält ein Karton der Sorte 1 jeweils 10 Pakete Schokokekse, 15 Pakete Butterkekse und 5 Packungen Vollkorngebäck.

In einem Versandkarton der Größe 2 befinden sich je 20 Packungen Butterkekse, 10 Packungen Vollkorngebäck und 10 Schachteln Waffeln.

Wie viele Versandkartons jeder Größe werden gebraucht, um den monatlichen Bedarf des Supermarktes zu decken?

⌛

[…]

6. Matrizen

6.1 Die Matrix als lineare Abbildung

[…]

Definition 6.1.1 (Matrix)

(1) Ein rechteckiges Zahlenschema (reeller Zahlen) in runden Klammern der folgenden Form heißt *(reelle) Matrix*. **(reelle) Matrix**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(2) *m* heißt die Zeilenzahl, *n* die Spaltenzahl dieser Matrix.

(3) Matrizen werden symbolisch alternativ wie folgt dargestellt:
$(a_{ij})_{m,n}$, (a_{ij}), $\mathbf{A}_{m,n}$, $\mathbf{A}$

(4) Die a_{ij} sind die Elemente der Matrix, *m* und *n* geben die *Ordnung der Matrix* an. **Ordnung der Matrix**

(5) $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m,n} = (a_{ij})_{m,n} = (a_{ij})$ heißt $m \times n$ -Matrix.
(lies *m* mal *n* Matrix, oder *m* Kreuz *n* Matrix)

(6) $a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \ldots a_{in}$ heißt *i*-te Zeile und

$$\left.\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}\right\}$$ **heißt *j*-te Spalte von A.**

KE 3 Ökonomische Anwendungen der Linearen Algebra

7 Lineare Gleichungssysteme und Matrixgleichungen

[…]

7.5 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Gaußsches Eliminationsverfahren

Gewöhnlich lernt man in der Schule das so genannte Einsetzungsverfahren, das Gleichsetzungsverfahren und das Subtraktionsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Die beiden ersten sollen hier nicht weiter behandelt werden, da sie für große Systeme ungeeignet sind. Das Subtraktionsverfahren erscheint jetzt unter dem vornehmeren Namen „Gaußsches Eliminationsverfahren".

Zu lösen ist also das Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Erlaubte Transformationen von Gleichungssystemen

Ähnlich wie bei den rangerhaltenden Transformationen gelten folgende Merkregeln über das Umformen von Gleichungssystemen, diesmal sind sie jedoch ausschließlich auf die *Zeilen* bezogen.

- Multipliziert man eine Zeile des Gleichungssystems (d. h. alle a_{ij} und b_i für ein *i*) mit einer Zahl $\alpha \neq 0$, ändert sich die Lösungsmenge nicht.
- Addiert man zu einer Zeile das λ-fache einer anderen Zeile, ändert sich die Lösungsmenge nicht ($\lambda \in \boldsymbol{R}$).
- Das Vertauschen von Zeilen ändert die Lösungsmenge nicht.

Gewöhnlich vollzieht man die Umformungsschritte in Form eines Algorithmus, der das Gleichungssystem in eine Form transformiert, die sofort alle Lösungen erkennen lässt. Solch einen Algorithmus stellen wir Ihnen jetzt vor; er ist fast wie ein Rechnerprogramm geschrieben. Beim späteren Nachrechnen von Beispielen wird der Vorteil dieser Schreibweise klar.

Der Gaußsche Eliminationsalgorithmus

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

1. Schritt:

Setzen Sie $i = 1$.

2. Schritt:

Ist $a_{ii} \neq 0$?

Falls ja, gehen Sie zum 3. Schritt.

Falls nein, gibt es ein $a_{ki} \neq 0$ für ein $k > i$?

Falls ja, tauschen Sie die *k*-te mit der *i*-ten Zeile, gehen Sie zu Schritt 3.

Falls nein, gibt es ein $a_{il} \neq 0$ für ein $l > i$?

Gibt es ein solches $a_{il} \neq 0$, vertauschen Sie die Spalten *i* und *l* und merken Sie sich, dass Sie die Variablen mit den Indizes *i* und *l* vertauscht haben. Beim Ablesen des späteren Ergebnisses müssen Sie das nämlich berücksichtigen. Gehen Sie zu Schritt 3.

Gibt es ein solches $a_{il} \neq 0$ nicht, streichen Sie die *i*-te Zeile, wenn auch $b_i = 0$ ist. Erniedrigen Sie *m* um 1 und gehen Sie zum Beginn von Schritt 2 zurück! Ist $b_i \neq 0$, hat das Gleichungssystem keine Lösung.

3. Schritt:

Dividieren Sie die *i*-te Zeile durch a_{ii} und nennen Sie die neuen Elemente wieder $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, b_i. Subtrahieren Sie das Soviel-fache der neuen *i*-ten Zeile von Zeile $i+1$, bzw. …, bzw. *m*, dass an der Position mit den Indizes ($i+1$, i), bzw. …, bzw. (*m*, *i*) eine 0 erscheint! Benennen Sie alle so erhaltenen Elemente von Zeile
$i+1,\ i+2, \ldots,\ m$ wieder $a_{i+1,1},\ a_{i+1,2}, \ldots,\ a_{i+1,n},\ b_{i+1}$.

Erhöhen Sie *i* um 1 und gehen Sie zum Schritt 2, falls $i \leq m$.

Das Endergebnis des Algorithmus ist auf den ersten *m* Spalten eine obere Dreiecksmatrix, deren Hauptdiagonale mit 1 besetzt ist, sowie eine transformierte „rechte Seite“!

[…]

Lösungen zu den Übungsaufgaben

[...]

Übungsaufgabe 5.2.1

Der Monatsbedarf beträgt	500	Pakete Schokokekse
	1150	Pakete Butterkekse
	450	Pakete Vollkorngebäck
	200	Schachteln Waffeln

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1150 \\ 450 \\ 200 \end{pmatrix}$ ist die Bedarfsgleichung.

Aus $10\alpha_1 = 500$ folgt $\alpha_1 = 50$
Aus $10\alpha_2 = 200$ folgt $\alpha_2 = 20$

also gibt insgesamt

$$50 \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 1150 \\ 450 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

✓

[...]