Gliederung

Leseprobe

1. Planungs- und Entscheidungstechniken im Unternehmen

[…]

Der Kurs Planungs- und Entscheidungstechniken ist als Einführung und Motivation zum späteren vertiefenden Studium des Operations Research (OR) zu verstehen. Grundlagenwissen des OR wird ebenso vermittelt wie Erfahrungen des Autors im Umgang mit OR-Methoden in der Unternehmenspraxis.

Kapitel 2 des Kurses ist eine Einführung in die Projektplanungsmethode "Netzplantechnik" (NPT). Hierzu werden Grundlagen der NPT vermittelt und Netzplanberechnungen bei vorgangsorientierten Netzen durchgeführt. Hinweise auf die Kapazitäts- und Kostenanalyse schließen sich an.

Kapitel 3 ist überschrieben mit "Lineare Planungsrechnung" und stellt klassische lineare Modelle der Mengen- und Kostenplanung aus dem Bereich der Produktion vor.

In Kapitel 4 wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem lineare Optimierungsaufgaben gelöst werden können. Das Verständnis dieses Lösungsverfahrens ist wichtig, um gängige LP-Software sinnvoll einsetzen zu können.

Kapitel 5 behandelt die Planung von Transporten und Güterströmen. Ferner wird aufgezeigt, wie das Werkzeug der Linearen Planungsrechnung auch erfolgreich auf von Natur aus nicht lineare Aufgaben angewandt werden kann.

Heuristiken sind Gegenstand des Kapitels 6. Es sind Verfahren, die gute Lösungen mit vertretbarem Rechenaufwand selbst bei sehr schwierigen Planungs- und Optimierungsaufgaben liefern. Im Bereich komplexer kombinatorischer Entscheidungsprobleme werden in jüngster Zeit die optimierenden durch heuristische Methoden dominiert.

In allen Kapiteln wurde der Versuch unternommen, die Grundideen der Verfahren so weit wie möglich am Beispiel zu entwickeln. Die Vermittlung exakten Methodenwissens muss also zugunsten anschaulicher Anwendungen zurückstehen; für den bloßen Benutzer von Planungs- und Entscheidungstechniken also ein soviel wie nötig und sowenig wie möglich.

[…]

2.1 Elemente

Um neueren Entwicklungen Rechnung zu tragen und Sie mit der Handhabung von **Netzplantechnikprogrammen** vertraut zu machen, stellen wir hier die Netzplantechnik (NPT) CPM anhand der softwareseitigen Realisierung von MS-PROJECT vor. Abweichend von früheren Versionen werden hier Vorgänge als Knoten und Abfolgebeziehungen als Pfeile dargestellt. Das Kürzel CPM steht für Critical Path Method, also Methode des **kritischen Pfades**. Der Begriff CPM leitet sich daraus ab, dass sich über der Zeitachse vom Beginn zum Ende eines Projektes ein oder mehrere Pfade von sogenannten kritischen Vorgängen ziehen. Vorgänge werden als kritisch bezeichnet, wenn durch ihre Verzögerung das Projektende in Verzug gerät; sie sind bestimmend für die Projektdauer.

NetzplanteChnik-programme

kritischer Pfad

[…]

In der Vorgangsliste werden die Vorgänge mit Zeit-, Struktur- und ggf. Termin-, Ressourcen- und Kostengrößen erfasst. Der Begriff *Liste* ist natürlich zu eng gefasst, da mit ihr der gesamte Netzplan eigentlich schon festliegt. Um Informationen über Terminabstimmungen, Kapazitätsauslastungen und Zahlungsströme zu gewinnen, sind bestimmte Berechnungen erforderlich, die im Folgenden an kleinen Beispielen erarbeitet werden sollen.

Tab. 2.1: Vorgangsliste (Auszug)

Nr.	Vorgang	Dauer [Tage]	Vorgänger	Termine	Ressourcen	Kosten
:						
:						
3	PRAE	14	1 EA - 4	$AZ^{=}$: 10	Mü [0.25] Hü [0.5]	2.975,-
:						
:						

Tabelle 2.1 zeigt einen Auszug aus einer typischen Vorgangsliste: unter der Kopfzeile befindet sich die Liste der eigentlichen Vorgänge. Die Angaben zu

Vorgang Nummer 3 bedeuten, dass es sich um den Vorgang PRAESENTATION – abgekürzt PRAE – handelt. Er dauert 14 Tage, kann technisch 4 Tage vor Ende seines Vorgängers 1 beginnen, muss aber aus terminlichen Gründen genau 10 Tage nach Projektbeginn starten. Die **E**nde/**A**nfang-Beziehung EA zwischen Vorgang PRAE und seinem Vorgänger (Vorgang Nr.1) erlaubt somit eine Überlappung von 4 Tagen, in der Tabelle angezeigt in der Spalte Vorgänger mit „1 EA - 4“. Weiterhin kann der Tabelle entnommen werden, dass Abteilungsleiter Müller mit 25% seiner Arbeitskraft und die Sachbearbeiterin Frau Hübner zu 50% mit dem Vorgang während seines Ablaufs beschäftigt sind. Die Gesamtkosten dieses Vorgangs beziffern sich auf 2.975,- €.

Vorgangsknoten

Ein Eintrag (eine Zeile) der Vorgangsliste aus Tabelle 2.1 wird im Netzplan als **Vorgangsknoten** dargestellt. Er enthält, schöpft man alle Darstellungsmöglichkeiten aus, die in der Abbildung 2.1 gezeigten Informationen.

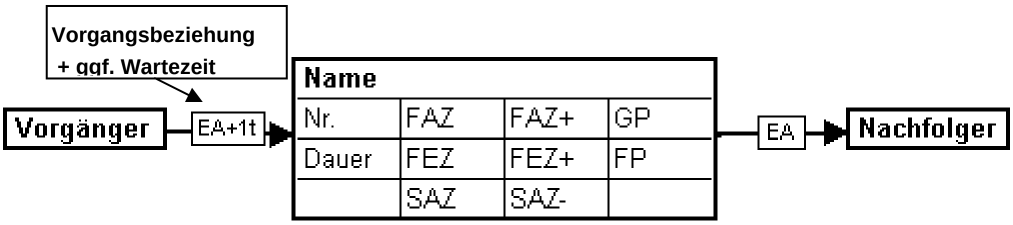


Abb.2.1: Vorgangsknoten

[…]

3.1 Mathematische Charakterisierung von Produktionsprozessen

lineare Limitationalität

Der folgende Spezialfall der **Linearen Limitationalität** wird uns im Kapitel "Lineare Planungsrechnung" ausschließlich beschäftigen.

$$r_i = a_{ij} x_j \qquad (i = 1,...,m) \tag{3.2}$$

Hier sind die Faktorverbräuche r_i proportional zu der produzierten Produktmenge x_j des Produktes P_j. Man nennt dann die a_{ij} Produktionskoeffizienten und ihre Reziprokwerte $\frac{1}{a_{ij}} = \frac{x_j}{r_i}$ Produktivität.

lineare Substitionalität

Weiterhin wird der folgende Spezialfall der **Linearen Substitutionalität** studiert. Sind wie oben Produkte P_1, ..., P_n linear limitational aus den Faktoren R_1, ..., R_m herstellbar,

$$r_i = a_{ij} x_j \qquad (i = 1,...,m;\ j = 1,...,n) \tag{3.3}$$

und sind diese Produkte in ihrer Funktionsfähigkeit gleich,

$$x = x_1 + ... + x_n \tag{3.4}$$

so sagt man: Die Menge x des einheitlichen Produktes kann über verschiedene Prozesse j auf den Niveaus x_j hergestellt werden. Diese Prozesse sind linear substituierbar, so lange nur (3.4) gilt !

Wir werden einige der eingeführten Begriffe jetzt an Beispielen erläutern.

Beispiel 3.1

Hergestellt werden in einem Unternehmen Tische vom Typ "Rustikus" (P_1) und vom Typ "Elegance" (P_2). Ersterer zeichnet sich durch 4 Beine und eine Eichenplatte, letzterer durch 3 Beine und eine Platte aus Edelholz aus.

Jedes der vier Beine wird mit je zwei Messingwinkeln beim Rustikus und jedes der drei Beine mit je einem anderen (!) Messingwinkel beim Elegance befestigt. Wir bezeichnen mit x_1, x_2 die Mengen produzierter Tische beider Typen und mit r_{1i} bzw. r_{2i} die Faktormengen:

r_{11}, r_{12}, r_{13}	Platten, Beine, Winkel für Rustikus
r_{21}, r_{22}, r_{23}	Platten, Beine, Winkel für Elegance.

Die zugehörige Produktionsfunktion ist

$$x_1 = \min\left(r_{11}, \frac{1}{4}r_{12}, \frac{1}{8}r_{13}\right)$$

$$x_2 = \min\left(r_{21}, \frac{1}{3}r_{22}, \frac{1}{3}r_{23}\right).$$

Die Verbrauchsfunktion lautet

$$\begin{aligned} r_{11} &= x_1, & r_{21} &= x_2, \\ r_{12} &= 4x_1, & r_{22} &= 3x_2, \\ r_{13} &= 8x_1, & r_{23} &= 3x_2. \end{aligned}$$

Die Zahlen 1, 4, 8 bzw. 1, 3, 3 sind die konstanten Produktionskoeffizienten. Die mit den Produktivitäten $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ bzw. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ multiplizierten Faktormengen limitieren die Ausbringungsmengen.

Aufgrund einer Rationalisierungsmaßnahme sind nun die Messingwinkel für Rustikus und Elegance identisch, ihre Menge sei mit r_3 bezeichnet. Die Verbrauchsfunktion ist nun

$$\begin{aligned} r_{11} &= x_1, & r_{21} &= x_2, \\ r_{12} &= 4x_1, & r_{22} &= 3x_2 \quad \text{und} \quad r_3 = 8x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

Selbst wenn man die Zuordnung "Winkel für Rustikus" und "Winkel für Elegance" $r_3 = r_{13} + r_{23}$ beibehält, ist der in der Verbrauchsfunktion dargestellte Gesamtzusammenhang nicht nach (x_1, x_2) auflösbar und damit nicht als eine Produktionsfunktion explizit darstellbar.

[…]

3.2.1 Die einstufige Produktionsplanung

Beispiel 3.3 (Fortsetzung von 3.1)

Im Rahmen einer erneuten Rationalisierung sind jetzt auch die Beine einheitlich für "Rustikus" und "Elegance" verwendbar; ihre Gesamtzahl sei mit r_2 bezeichnet. Der Verkaufspreis von "Rustikus" betrage 980,-- €, der von "Elegance" 680,-- €. Die Faktorpreise oder Preise vorgefertigter Teile sowie ihre Verfügbarkeiten pro Periode entnehmen Sie der Tabelle 3.2.

	Einstandspreis [€/Stck]	Verfügbarkeit [Stck]
Platte Eiche	100,--	18
Platte Edelholz	150,--	12
Bein	50,--	90
Winkel	10,--	150

Tab. 3.2: Preise und Verfügbarkeiten für Tischproduktion

Die Stückdeckungsbeiträge errechnen sich zu

$$c_1 = 980 - (100 + 4{\cdot}50 + 8{\cdot}10) = 600{,}\text{-- €} \qquad \text{und}$$

$$c_2 = 680 - (150 + 3{\cdot}50 + 3{\cdot}10) = 350{,}\text{-- €}.$$

Die Deckungsbeitragsmaximierung wird also durch folgende Lineare Optimierungsaufgabe gelöst:

$$\max\ 600x_1 + 350x_2$$

unter den Nebenbedinungen

$$\begin{array}{rrl}
1\cdot x_1 & & \leq 18 \\
 & 1\cdot x_2 & \leq 12 \\
4\cdot x_1 & +3\cdot x_2 & \leq 90 \\
8\cdot x_1 & +3\cdot x_2 & \leq 150 \\
x_1 & , x_2 & \geq 0.
\end{array}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass unsere wunderschönen Tische unbegrenzten Absatz finden, sollte man x_1 = 15 Stück Rustikus und x_2 = 10 Stück Elegance herstellen. Der Deckungsbeitrag beträgt dann 12.500,-- €. Die Lösung wurde mit LP-Software ermittelt.

[…]

4.1 Die Zielsetzung dieses Kapitels

Wie in Kapitel 3 gezeigt wurde, kommen LP-Probleme in den verschiedensten betriebswirtschaftlichen Gewändern daher. In ihrer Grundstruktur ähneln sie einander jedoch alle:

- Stets ist über die Werte eines Vektors $x^T = (x_1, \ \ldots, \ x_n)$ von Entscheidungsvariablen zu befinden.

  Die in Kapitel 3 übliche Unterscheidung in Mengen von Produktionsfaktoren (r), Zwischenprodukten (y) und Endprodukten (x) wird jetzt zugunsten einer durchgängigen Bezeichnung der Variablen mit dem Symbol x_j aufgegeben. Wir folgen damit der in der Literatur üblichen Nomenklatur für allgemeine LP-Probleme.

- Stets ist eine in diesen Entscheidungsvariablen lineare Funktion $x_o = c^T x + d = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + d$ zu optimieren, d. h. zu maximieren oder zu minimieren.

- Die möglichen Entscheidungen unterliegen Systemen linearer Restriktionen:

  - häufig vom Typ $\leq$: $A^1 x \leq b^1$,
  - oder vom Typ $\geq$: $A^2 x \geq b^2$,
  - oder aber vom Typ $=$: $A^3 x = b^3$;

  bei vielen LP-Problemen kommen Restriktionen aller drei Typen vor.

- Einige der Entscheidungsvariablen gehorchen der Nichtnegativitätsbedingung oder dürfen nur zwischen unterer und oberer Schranke (LB bzw. UB) variieren.

Da Lower und Upper Bounds unter die ≤- bzw. ≥-Bedingungen subsumiert werden können, findet man oft nur die Nichtnegativitätsbedingungen gesondert aufgeführt: $x_j \geq 0$ für einige j.

Insgesamt hat ein LP-Problem also die Form

$$\text{Opt } x_o = c^T x + d$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &A^1 x \leq b^1 \quad m^1 \text{ Restriktion} \\ &A^2 x \geq b^2 \quad m^2 \text{ Restriktionen} \\ &A^3 x = b^3 \quad m^3 \text{ Restriktionen} \qquad m^1 + m^2 + m^3 = m \end{aligned} \tag{4.1}$$

und einige $x_j \geq 0$.

[…]

5.1.2 Kostenminimaler Fluss

Ab jetzt repräsentieren die Kanten des ungerichteten Graphen Transportwege und die Knoten Orte, an denen Angebot oder Nachfrage eines Gutes besteht bzw. nur umgeschlagen werden. Genauer sei die Menge der Orte V in drei disjunkte Teilmengen zerlegbar $V = V_1 + V_2 + V_3$.

Quelle

V_1 bezeichne die Menge solcher Orte, an denen (von außen) das zu transportierende Gut ins System eingespeist wird; sogenannte **Quellen**.

Senke

V_3 bezeichne die Menge solcher Orte, an denen (von außen) das zu transportierende Gut aus dem System entnommen wird; sogenannte **Senken**.

Umschlagort

V_2 sind entsprechend reine **Umschlagorte** mit ausgeglichener Flussbilanz: Input = Output.

Konkreter wollen wir annehmen, dass in einem Quellort $i \in V_1$[1] maximal a_i Gütereinheiten pro Zeiteinheit eingespeist werden können und aus einem Ort $i \in V_3$ mindestens b_i Gütereinheiten entnommen werden sollen. $x_{ij} \geq 0$ bezeichne den **Fluss** oder **Güterstrom** in Kante $<i, j>$ von i nach j; dieser Strom sei durch eine **Wegekapazität** κ_{ij} [Gütereinheiten/Zeiteinheit] beschränkt. Ferner verursache der Gütertransport von i nach j $c_{ij} > 0$ Geldeinheiten Transportkosten pro Gütereinheit.

Fluss
Güterstrom
Wegekapazität

Die Aufgabe, einen **transportkostenminimalen Güterstrom** im System zu finden, formulieren wir jetzt als Lineare Optimierungsaufgabe

transportkosten-minimaler Güterstrom

$$\min\ x_o = \sum_{i \in V} \sum_{j \in N(i)} c_{ij} x_{ij} \tag{5.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j \in N(i)} x_{ij} - \sum_{\ell \in N(i)} x_{\ell i} \begin{cases} \leq & a_i & \text{für} & i \in V_1 \\ = & 0 & \text{für} & i \in V_2 \\ \leq & -b_i & \text{für} & i \in V_3 \end{cases}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \kappa_{ij} \quad \text{für alle } (i, j).$$

Hierbei bezeichnet $N(i) = \{j | <i, j> \in E\}$ die Menge aller Nachbarknoten von i.

Die erste Gruppe von Nebenbedingungen liest sich: Aus einem Quellknoten kann nicht mehr herausfließen, als in ihn hineinfließt plus als in ihn von außen eingespeist wird. Lesen Sie die beiden anderen Gruppen analog ! Achten Sie darauf, dass unser Modell (5.1) in jeder Kante Flüsse in beiden Richtungen zulässt! Sie heben sich teilweise gegeneinander auf, das Resultat nennt man Nettofluss. Natürlich müssen nicht unbedingt Kosten $c_{ij} = c_{ji}$ und Kapazitäten $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ symmetrisch sein !

(5.1) heißt in der Literatur das **Minimum-Fluss-Problem**. Als lineares Optimierungsproblem lässt es sich selbstverständlich mit jeder LP-Software lösen (siehe Beispiel 5.1 weiter unten).

Minimum-Fluss-Problem

Nicht für alle Wegenetze, Kapazitäten, Quell- und Senkflüsse gibt es überhaupt einen zulässigen Güterstrom. Schon wenn Σa_i kleiner als Σb_i ist, kann kein zulässiger Strom existieren; Ab- oder Aufbau von Zwischenlägern des Guts sind im Modell nicht vorgesehen.

---

1 Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreibt man oft vereinfachend $i \in V_1$ statt $v_i \in V_1$.

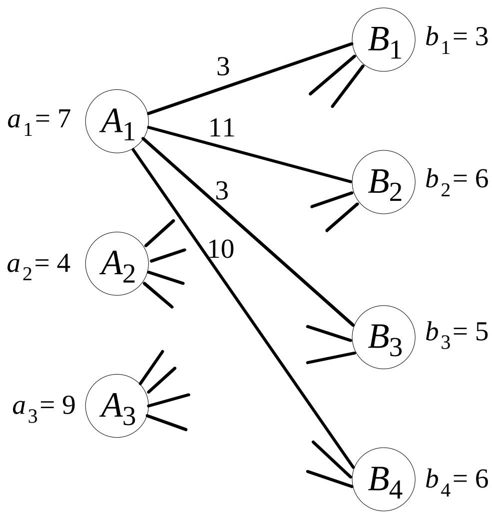
[…]

5.1.3. Transport- und Zuordnungsproblem

[…]

Beispiel 5.2

Der folgende bipartite Graph stellt ein einfaches Transportproblem dar. Drei Anbieter, jetzt zur besseren Kenntlichmachung mit A_1, A_2, A_3 bezeichnet, beliefern vier Nachfrager B_1, B_2, B_3, B_4. Angebots- und Bedarfsmengen sind an den Knoten notiert; die Zahlen an den Kanten sind die Einheitstransportkosten in GE.



<u>Legende:</u> Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die übrigen Transportwege nur angedeutet.

Ihre Einheitskostensätze sind

$j =$	1	2	3	4
$i = 2$	1	9	2	8
$i = 3$	7	4	10	5

Abb. 5.3: Ein konkretes Transportproblem

Natürlich ist Abb. 5.3 nur eine abstrahierende Darstellung der Lage der Anbieter und Nachfrager zueinander. Auf einer Landkarte hat man sich die Transportkosten z. B. als den Abständen proportional vorzustellen.

[…]

Lösungen zu den Übungsaufgaben