Gliederung

Leseprobe

[…]

2. Optimierungsprobleme

2.1 Einführung

Alle Organisationen müssen Entscheidungen über die Allokation und Nutzung ihrer Ressourcen treffen. Da diese Ressourcen nur beschränkt zur Verfügung stehen, muss ein Management permanent die Verwendung dieser Ressourcen so planen, dass das Unternehmensziel möglichst gut erreicht wird. Mögliche Ziele sind dabei die Maximierung des Umsatzes oder des Gewinns sowie die Minimierung der Kosten. Die knappen Ressourcen können vielfältiger Natur sein: Finanzielle Ressourcen, Vorräte an Rohstoffen, verfügbare Maschinenzeit oder die Rechenzeit von Computern.

Beispiele solcher Entscheidungen sind:

- Eine Bank möchte Kapital zur höchstmöglichen Rendite anlegen. Dies muss im Rahmen der gesetzlich vorgeschriebenen Liquiditätsgrenzen geschehen und unter der Bedingung, dass genügend Flexibilität gewahrt bleibt, um den Forderungen der Kunden zu genügen.
- Eine Werbeagentur möchte für ein Produkt eines Kunden eine möglichst passende Werbemöglichkeit zu möglichst geringen Kosten finden. Unter sehr vielen Zeitschriften müssen eine oder mehrere ausgewählt werden, die sich durch unterschiedliche Leserkreise oder Werbekosten unterscheiden.
- Ein Möbelhersteller möchte seinen Gewinn maximieren. Die herzustellenden Produkte muss er unter Berücksichtigung seiner begrenzten Produktionskapazität und der Nachfrage seiner Kunden auswählen.
- Ein Futterhersteller möchte ein Futter mit einem hohen Proteingehalt herstellen. Von 10 möglichen Rohstoffen muss er die Anteile so bestimmen, dass der Proteingehalt eine gewisse Grenze überschreitet und dies zu minimalen Kosten.

Diesen Problemen ist gemeinsam, dass ein bestimmtes Ziel unter Einhaltung gewisser Restriktionen erreicht werden soll.

Lineare und nichtlineare Programmierung sind mathematische Techniken zur Lösung von Optimierungsproblemen; das Adjektiv ‚linear‘ drückt eine proportionale Abhängigkeit zwischen den in diesen Problemen betrachteten Größen aus.

Verschiedene Bedingungen an ein Entscheidungsproblem müssen erfüllt sein, um es als Optimierungsproblem formulieren zu können:

- Es müssen verschiedene Entscheidungsalternativen gegeben sein, die die Erfüllung des Unternehmensziels maßgeblich beeinflussen.
- Die Ressourcen müssen beschränkt verfügbar sein.
- Ein Unternehmensziel, das abhängig von den Entscheidungsalternativen ist, muss klar formulierbar sein.
- Die Entscheidungsalternativen müssen als mathematische Variable ausdrückbar sein.
- Das Unternehmens- oder Projektziel, sowie die Restriktionen müssen als mathematische Funktionen der Entscheidungsvariablen formulierbar sein.

Demnach bestehen alle Optimierungsmodelle aus folgenden Komponenten: Entscheidungs- (oder strukturelle) Variable, Restriktionen und Zielfunktion:

1. Entscheidungsvariable sind Größen, die der Entscheidungsträger beeinflussen kann (z. B. Mischungsverhältnis bei Futtermischungen, Transportplan, Zuordnungen von Mitarbeiter zu Stellen). Für diese Variable sind optimale Werte gesucht.
2. Die Zielfunktion ist eine Funktion der Entscheidungsvariablen, die maximiert oder minimiert werden soll (z. B. Minimierung der Kosten oder Maximierung des Gewinns).
3. Restriktionen (Nebenbedingungen) sind Bedingungen, die die Menge aller zulässigen Variablenkombinationen einschränken und damit den Zulässigkeitsbereich der Entscheidungsvariablen definieren. Es gibt strukturelle Restriktionen, die aus ökonomischen Bedingungen (Knappheit der Ressourcen) abgeleitet werden sowie Nichtnegativitätsrestriktionen, die die Variablen auf null oder positive Werte beschränken.

[…]

2.4 Anwendung: Herstellung von Müsli

2.4.1 Problembeschreibung

Müslihersteller ‚Feinkost' stellt die 4 Müslisorten Schokoladenmüsli (M_1), Früchtemüsli (M_2), Standardmüsli (M_3) und Honigmüsli (M_4) in 250 Gramm-Packungen her. Zur Herstellung dieser Müslisorten benötigt er die Zutaten Haferflocken (Z_1), Schokoladenstreusel (Z_2), Trockenobst (Z_3), Zucker (Z_4) und Honig (Z_5), die nur begrenzt zur Verfügung stehen. Der Vorrat an Haferflocken beträgt 8 kg, außerdem sind 1 kg Schokoladenstreusel, 1,8 kg Trockenobst, 600

Gramm Zucker und 100 Gramm Honig vorhanden. Nach seinem Rezept benötigt der Hersteller ‚Feinkost' folgende Mengen in Gramm dieser Zutaten zur Herstellung von 100 Gramm jeder Müslisorte:

in g / 100 g	M_1	M_2	M_3	M_4
Z_1	70	65	75	70
Z_2	25	5	10	5
Z_3	0	25	10	15
Z_4	5	5	5	3
Z_5	0	0	0	7

Tab.2.3: Menge der Zutaten in Gramm für jedes Müsli

Die Verkaufspreise je Packung betragen für das Schokoladenmüsli 3,50 € und für das Früchtemüsli 3,70 €, das Standardmüsli kostet 2,90 € und das Honigmüsli 4,20 €. Für die kommende Woche soll die Anzahl herzustellender Packungen für die vier Müslisorten so bestimmt werden, dass der Gesamtumsatz maximiert wird.

2.4.2 Modellierung

Zunächst soll die herzustellende Menge jedes Müslis ermittelt werden. Die Entscheidungsvariablen dieses Problems bilden daher die Mengen x_i in Kilogramm, die von jeder Müslisorte M_i erstellt werden sollen. Der Vorrat für jede Zutat Z_j $(1 \le j \le 5)$ in Kilogramm werde durch b_j bezeichnet, die Menge an Zutat Z_j in Prozent zur Herstellung von der Müslisorte M_i wird durch die Koeffizienten a_{ij} angegeben, p_i $(1 \le i \le 4)$ seien die Verkaufspreise pro Packung. In Tab. 2.4sind diese Parameter in folgenden Zellen angegeben:

$D$44:$G$44 $(p_1, ..., p_4)$

$K$47:$K$51 $(b_1, ..., b_5)^t$

$D$54:$G$54 $(x_1, ..., x_4)$

$D$47:$G$51 $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} \end{pmatrix}$$

Bedeutung einiger Zellen:

$I$44 Umsatz $4 \cdot \sum_{i=1..4} x_i \cdot p_i$

$I$47:$I$51 Bedarf der Zutaten $\sum_i x_i \cdot a_{ij}$ $(1 \le j \le 5)$

	C	D	E	F	G	H	I	J	K
43		M_1	M_2	M_3	M_4				
44	Preis/ Pack.:	3,50 €	3,70 €	2,90 €	4,20 €		157,37 €		
45									
46	in %	M_1	M_2	M_3	M_4		Bedarf		Vorrat
47	Z_1	70 %	65 %	75 %	70 %		8,000		8,000
48	Z_2	25 %	5 %	10 %	5 %		1,000		1,000
49	Z_3	0 %	25 %	10 %	15 %		1,800		1,800
50	Z_4	5 %	5 %	5 %	3 %		0,544		0,600
51	Z_5	0 %	0 %	0 %	7 %		0,100		1,000
52	Gesamt	100 %	100 %	100 %	100 %				
53									
54	in kg	1,044	4,591	4,380	1,429				

Tab.2.4: Modell zum ‚Müsliproblem'

Zellen	Formel	Kopiere zu
$I$44	{=4*MMULT(D44:G44;MTRANS(D54:G54))}	
$I$47	=SUMMENPRODUKT(D47:G47;$D$54:$G$54)	$I$48:$I$51

2.4.3 Lösung des Optimierungsproblems

Das lineare Optimierungsproblem stellt sich nun wie folgt dar:

Maximiere Umsatz	$4 \cdot \sum_{i=1..4} x_i \cdot p_i$		$I$44
Variable	$x_1,\ldots, x_4$		$D$54:$G$54
Bedarf ≤ Vorrat	$\sum_i x_i \cdot a_{ij} \leq b_j$	$(1 \leq j \leq 5)$	$I$47:$I$51<= K$47:$K$51
Mengen ≥ 0	$x_i \geq 0$	$(1 \leq i \leq 4)$	$D$54:$G$54 >= 0

Dieses lineare Modell wird nun in das Solver-Menü durch die Angabe der Zellreferenzen eingegeben:

Zielzelle:	$I$44
Zielwert:	Max
Veränderbare Zellen:	$D$54:$G$54
Nebenbedingungen:	$D$54:$G$54 >= 0
	$I$47:$I$51 <= $K$47:$K$51
	linear

[…]

Aufgabe 15.5

In einem Holzzuschneidebetrieb sollen für einen bestimmten Auftrag Holzleisten L_1,..., L_5 verschiedener Längen erstellt werden (siehe Tab. 15.6). Diese Holzleisten werden aus zwei verschieden langen Rohleisten mit den Längen 160 cm und 90 cm erstellt. Die Beschaffungskosten sowie die Längen dieser Leisten sind in Tab 15.5 aufgelistet.

Werden durch den Zuschnittplan mehr Holzleisten eine Typs erstellt als bestellt wurden, so werden die überschüssigen Leisten für spätere Aufträge gelagert und intern bewertet. Die Bewertungen pro Stück befinden sich in Tab 15.6.

	C	D	E
16	Typ	Länge	Kosten
17	R1	160 cm	5,00 €
18	R2	90 cm	3,00 €

Tab.15.5: Längen und Beschaffungskosten der Rohleisten

	C	D	E	F	G	H
22	Typ	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
23	Länge	90 cm	75 cm	60 cm	35 cm	25 cm
24	Bestellung	21	37	30	18	22
25	Bewertung	1,50 €	1,20 €	1,00 €	0,50 €	0,40 €

Tab.15.6: Länge und Auftragsmenge der zu erstellenden Holzleisten

Erstellen Sie einen Zuschneideplan, so dass

- der Auftrag laut Tab. 15.6 erfüllt wird und
- die Beschaffungskosten der benötigten Rohleisten abzüglich der gesamten Bewertung für die Überproduktion minimiert werden.

[…]

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu 15.1

In Tab. L.13 sind sämtliche Schnittmuster für beide Rohleisten aufgelistet. Die Zellen dieser Tabelle haben folgende Bedeutung:

\$C\$48:\$C\$72	Bezeichnung der Schnittmuster
\$E\$48:\$I\$72	Anzahl der resultierenden Holzleisten L_1, ..., L_5 für jedes Schnittmuster
\$D\$48:\$D\$72	Anzahl der Rohleisten, die nach Schnittmuster R1.01 bis R2.06 zersägt werden

$J$48:$J$72	Gesamtlänge der Holzleisten, die aus einer Rohleiste geschnitten werden
$K$48:$K$72	Verschnitt für jedes Schnittmuster
$E$74:$I$74	Bei aktuellem Zuschnittplan (Zellen $D$48:$D$72) produzierte Holzleisten
$E$75:$I$75	Überproduktion in Abhängigkeit des gegebenen Auftrags (Zellen $D$24:$H$24)
$K$74	Gesamter Verschnitt

	C	D	E	F	G	H	I	J	K
47	Schnittmuster	Anzahl	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	Länge	Verschnitt
48	R1.01	7	1	0	1	0	0	150 cm	10 cm
49	R1.02	9	1	0	0	2	0	160 cm	0 cm
50	R1.03	0	1	0	0	1	1	150 cm	10 cm
51	R1.04	0	1	0	0	0	2	140 cm	20 cm
52	R1.05	7	0	2	0	0	0	150 cm	10 cm
53	R1.06	23	0	1	1	0	1	160 cm	0 cm
54	R1.07	0	0	1	0	2	0	145 cm	15 cm
55	R1.08	0	0	1	0	1	2	160 cm	0 cm
56	R1.09	0	0	1	0	0	3	150 cm	10 cm
57	R1.10	0	0	0	2	1	0	155 cm	5 cm
58	R1.11	0	0	0	2	0	1	145 cm	15 cm
59	R1.12	0	0	0	1	2	1	155 cm	5 cm
60	R1.13	0	0	0	1	1	2	145 cm	15 cm
61	R1.14	0	0	0	1	0	4	160 cm	0 cm
62	R1.15	0	0	0	0	4	0	140 cm	20 cm
63	R1.16	0	0	0	0	3	2	155 cm	5 cm
64	R1.17	0	0	0	0	2	3	145 cm	15 cm
65	R1.18	0	0	0	0	1	5	160 cm	0 cm
66	R1.19	0	0	0	0	0	6	150 cm	10 cm
67	R2.01	5	1	0	0	0	0	90 cm	0 cm
68	R2.02	0	0	1	0	0	0	75 cm	15 cm
69	R2.03	0	0	0	1	0	1	85 cm	5 cm
70	R2.04	0	0	0	0	2	0	70 cm	20 cm
71	R2.05	0	0	0	0	1	2	85 cm	5 cm
72	R2.06	0	0	0	0	0	3	75 cm	15 cm
73									
74	Produziert		21	37	30	18	23	∑	140 cm
75	Überschuss		0	0	0	0	1		

Tab. L.13: Basistabelle für das Optimierungsmodell des Verschnittproblems

Zellen	Formel	Kopiere zu
$J$48	=SUMMENPRODUKT($D$23:$H$23;E48:I48)	$J$49:$J$72
$K$48	=$D$17-J48	$K$49:$K$66
$K$67	=$D$18-J67	$K$68:$K$72
$E$74	=SUMMENPRODUKT($D$48:$D$72;E48:E72)	$F$74:$I$74;$K$74
$E$75	=E74-D24	$F$75:$I$75

Zellen	Format
$J$48:$K$72; $K$74	0 "cm"
$E$74:$I$75	0

In Tab. L.14 werden die Kosten für die Durchführung des Auftrags berechnet. Die Zellen $F$97:$F$98 beinhalten die Kosten der Rohleisten, Zelle $F$100 die gesamten Rohmaterialkosten. Die Bewertung der Überproduktion wird in Zelle $F$101 vorgenommen. Die Gesamtkosten abzüglich dieser Bewertung bildet die Zielfunktion, die in Zelle $F$102 berechnet wird.

	C	D	E	F
96	Typ	Anzahl	Stückkosten	Kosten
97	R1	46	5,00 €	230,00 €
98	R2	5	3,00 €	15,00 €
99				
100	Gesamtkosten:			245,00 €
101	Bewertung der Zusatzproduktion:			0,40 €
102	Zielfunktion:			244,60 €

Tab. L.14: Berechnung der Rohmaterialkosten und der Zielfunktion

Zellen	Formel	Kopiere zu
$F$97	=D97*E97	$F$98
$F$100	=SUMME(F97:F98)	
$F$101	=SUMMENPRODUKT(D25:H25;E75:I75)	
$F$102	=F100-F101	

Folgendes Optimierungsproblem wird gelöst:

Minimiere	$F$102
Variable	$D$48:$D$72
Restriktionen	$E$75:$I$75>=0
	$D$48:$D$72>=0
	$D$48:$D$72 ganzzahlig
	linear

In der Optimallösung werden 46 Rohleisten des Typs R1 und 5 Rohleisten des Typs R2 mit Rohmaterialkosten von insgesamt 245,00 € benötigt. Der gesamte Verschnitt beträgt 140 cm. Über die Bestellung hinaus wird eine Holzleiste der Länge 25 cm erstellt.