Gliederung

Kurseinheit 3 »Postoptimale Analyse und LP-Software«

Leseprobe

[…]

1.2 Einführendes Beispiel und Grundlagen

Zur Einführung in die Problematik beginnen wir mit einem Beispiel zur Aluminiumlegierung. Die Aufgabe lautet, 2000 kg einer solchen Legierung aus verschiedenen Schrottsorten zu minimalen Kosten herzustellen, wobei die beschränkte Verfügbarkeit der Rohstoffe und bestimmte Qualitätsanforderungen an die Legierung zu beachten sind.

Es stehen 5 Sorten Schrott sowie handelsübliches „reines“ Aluminium (Alr) und „reines“ Silizium (Sir) für die Legierung bereit. Die Preise sind:

Tab. 1.1:

Schrottsorte	1	2	3	4	5	Alr	Sir
Preis (€/kg)	0,03	0,08	0,17	0,12	0,15	0,21	0,38

Die Zusammensetzung dieser Rohmaterialien entnehmen Sie dem folgenden Zahlenschema:

Tab. 1.2:

Schrottsorte / Gehalt in %	1	2	3	4	5	Alr	Sir
Eisen (Fe)	15	4	2	4	2	1	3
Kupfer (Cu)	3	5	8	2	6	1	–
Mangan (Mn)	2	4	1	2	2	–	–
Magnesium (Mg)	2	3	–	–	1	–	–
Aluminium (Al)	70	75	80	75	80	97	–
Silizium (Si)	2	6	8	12	2	1	97
sonstige	6	3	1	5	7	–	–

Die Verfügbarkeit der Schrottsorten ist in der folgenden Tabelle angegeben. Die Zeile „Max“ enthält die von der jeweiligen Sorte vorhandenen Mengen, während die Zeile „Min“ angibt, welche Mindestmengen davon in der Legierung enthalten sein müssen.

Tab. 1.3:

Mengenbeschränkungen in kg \ Schrottsorte	1	2	3	4	5
Min	–	–	400	100	–
Max	200	750	800	700	1500

Die Qualitätsanforderungen formuliert der Fachmann als Mindest- und Höchstgehalten an Metallen in der Legierung:

$$
\begin{array}{lcrll}
\text{Fe} & \leq & 3\%, & \text{entspricht} & 60 \text{ kg} \\
\text{Cu} & \leq & 5\%, & \text{entspricht} & 100 \text{ kg} \\
\text{Mn} & \leq & 2\%, & \text{entspricht} & 40 \text{ kg} \\
\text{Mg} & \leq & 1.5\%, & \text{entspricht} & 30 \text{ kg} \\
\text{Al} & \geq & 75\%, & \text{entspricht} & 1500 \text{ kg} \\
\text{Si} & \geq & 12.5\%, & \text{entspricht} & 250 \text{ kg} \\
\text{Si} & \leq & 15\%, & \text{entspricht} & 300 \text{ kg.}
\end{array}
\qquad (1.1)
$$

Um eine mathematische Formulierung der anfangs gestellten Aufgabe zu erhalten, bezeichnen wir mit der Variablen x_j die Menge der j-ten Schrottsorte, die in die Legierung eingeht ($j = 1, ..., 5$); x_6 und x_7 bezeichnen die Menge an Alr bzw. Sir.

Entscheidungsvariable

Über diese Variablen wollen wir entscheiden, sie heißen daher *Entscheidungsvariable*. Die Rohmaterialkosten sind nun durch die lineare Funktion

$$x_0 = 0.03x_1 + 0.08x_2 + 0.17x_3 + 0.12x_4 + 0.15x_5 + 0.21x_6 + 0.38x_7 \qquad \textbf{(1.2)}$$

Zielfunktion

gegeben. Vergleichen Sie hierzu nochmals Tabelle 1.1. Das „Ziel" der Aufgabenstellung ist die Minimierung der Funktion (1.2), die demzufolge *Zielfunktion* genannt wird. Der Wert dieser Funktion wird mit x_0 bezeichnet, da er bei der Lösung des Problems als Variable eines Gleichungssystems in Erscheinung treten wird.

Nebenbedingungen Restriktionen

Die Variablen $x_1, ..., x_7$ können nicht beliebige reelle Zahlen sein, sondern müssen sog. *Nebenbedingungen (Restriktionen)* erfüllen, die sich aus der Aufgabenstellung ergeben.

[…]

4.2 Die Iterationsschritte

Übungsaufgabe 4.2

i) Es sei das LOP

$$\text{Max } 3x_1 + x_2$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\le 2 \\ -x_1 + 2x_2 &\le 7 \\ x_1 &\le 6 \\ x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

gegeben. Stellen Sie das zugehörige LOP in Standard-Gleichungsform auf und lösen Sie dies mit Hilfe des obigen Iterationsverfahrens!

ii) Stellen Sie die im Laufe des Verfahrens generierten zulässigen Basislösungen geometrisch als Ecken der zulässigen Lösungsmenge dar!

[…]

5.2 Zusammenhänge zwischen zueinander dualen linearen Optimierungsproblemen

Die Dualitätstheorie stellt einige wichtige Beziehungen zwischen primalem und dualem Problem her, die im folgenden Satz zusammengefaßt sind. Die Aussagen dieses Kapitels beziehen sich dabei auf das primale Problem in der Form

$$\text{Max } \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \qquad \textbf{(P)}$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\le \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

(vgl. (5.12)) und das duale Problem in der Form

$$\text{Min } \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} \qquad \textbf{(D)}$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} &\ge \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{u} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

(vgl. (5.15)).

Satz 5.1

Für die LOPs (P) und (D) gilt genau eine der folgenden Aussagen:

i) (P) und (D) haben beide optimale Lösungen und die optimalen Zielfunktionswerte stimmen überein.

ii) (P) besitzt eine zulässige Lösung und die Zielfunktion ist nach oben unbeschränkt; (D) besitzt keine zulässige Lösung.

iii) (D) besitzt eine zulässige Lösung und die Zielfunktion ist nach unten unbeschränkt; (P) besitzt keine zulässige Lösung.

iv) (P) und (D) haben beide keine zulässige Lösung.

[…]

5.3 Die Duale Simplexmethode

Das in Abschnitt 5.2 beschriebene Iterationsverfahren geht von einem primal zulässigen Tableau aus. Unter Beibehaltung der primalen Zulässigkeit werden solange neue Tableaus generiert, bis auch die duale Zulässigkeit erreicht und somit das optimale Tableau gefunden ist.

primale Simplexmethode

duale Simplexmethode

Die auf der Dualitätstheorie basierende duale Simplexmethode ist dagegen anwendbar, wenn für ein LOP ein dual zulässiges Tableau angegeben werden kann. Analog zum obengenannten Verfahren – man spricht dabei auch von der *primalen Simplexmethode* – werden bei der *dualen Simplexmethode* unter Beibehaltung der dualen Zulässigkeit neue Tableaus generiert, bis auch die primale Zulässigkeit erreicht ist.

Wir geben den Algorithmus der dualen Simplexmethode an, demonstrieren ihn an einem Beispiel und werden die Vorgehensweise anschließend anhand von Dualitätsbetrachtungen am Beispiel motivieren.

[…]

8 Postoptimale Analyse

Mit der Bestimmung einer optimalen Lösung eines LOPs sind in der Praxis bei weitem noch nicht alle Probleme gelöst. In vielen Fällen unterliegen die Ausgangsdaten **A**, **b** und **c** Schwankungen, deren Einfluß auf die Lösung zu untersuchen ist, oder man stellt im Nachhinein erst fest, daß einige der Daten geändert werden müssen. Möglicherweise wird auch nach der Berechnung der Lösung erst klar, daß noch gewisse Restriktionen oder Variable hinzuzufügen oder zu eliminieren sind.

Um nicht jedesmal ein LOP völlig neu berechnen zu müssen, ist die Untersuchung des Einflusses von Änderungen der Ausgangsdaten auf die optimale Lösung von großem praktischen Interesse. Alle derartigen Überlegungen, die also *nach* der Bestimmung der optimalen Lösung anfallen, werden unter dem Begriff *Postoptimale Analyse* zusammengefaßt.

Postoptimale Analyse

In den beiden ersten Abschnitten des Kapitels wollen wir uns auf spezielle Änderungen in der rechten Seite **b** oder im Zielfunktionsvektor **c** eines LOPs beschränken. Betrachtet man lediglich „kleine“ Veränderungen, d.h. solche, bei denen die Optimalität und Zulässigkeit der dazugehörigen Basislösungen erhalten bleiben, so handelt es sich um eine sog. *Sensitivitätsanalyse* (Abschnitt 8.1). Werden Veränderungen der Ausgangsdaten in einem breiten Spektrum untersucht, so spricht man von *Parametrischer Programmierung* (Abschnitt 8.2). Auf weitere Strukturänderungen in den Ausgangsdaten wird schließlich in Abschnitt 8.3 eingegangen.

Sensitivitätsanalyse

Parametrische Programmierung

[…]

8.2 Parametrische Programmierung

Übungsaufgabe 8.3

Lösen Sie das LOP (8.12) für die speziellen Parameterwerte $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = 5$ graphisch. Vergleichen Sie die gefundenen optimalen Werte für x_1 und x_2 mit Tab. 8.1.

[…]

8.3 Strukturelle Änderungen der Ausgangsdaten

Veränderungen der Werte

In den beiden vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels haben wir untersucht, welchen Einfluss *Veränderungen der Werte* in den Ausgangsdaten **b** und **c** eines LOPs auf die optimale Lösung haben. Auf entsprechende Untersuchungen von Variationen der Koeffizienten der Aktivitätenmatrix **A** wurde wegen ihres erheblich höheren Schwierigkeitsgrades verzichtet.

Strukturänderungen

Abschließend sollen die Auswirkungen von *Strukturänderungen* der Ausgangsdaten studiert werden.

Wir beschränken uns jeweils auf eine knappe, teilweise nur andeutungsweise Beschreibung und ggf. eine Illustration durch ein Beispiel.

Elimination einer Restriktion

Falls die zu eliminierende Restriktion nicht bindend ist, d.h. die Restriktionsgerade nicht durch die optimale Ecke läuft und die zugehörige Schlupfvariable in der Basis ist, so bleibt die ursprüngliche Lösung auch nach Elimination der Restriktion optimal. Ist die Restriktion bindend, so wird die zugehörige Schlupfvariable postoptimal als unbeschränkt betrachtet. Da sie ab jetzt beliebige reelle Werte annehmen darf, ist die Restriktion praktisch außer Kraft gesetzt.

Ist das Kriteriumselement zu dieser Schlupfvariablen im optimalen Endtableau von null verschieden, so lohnt sich auf jeden Fall die Aufnahme der Schlupfvariablen in die Basis; und zwar je nach Vorzeichen des Kriteriums mit positivem oder negativem Wert! Wir führen Ihnen einen Spezialfall vor.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 4.2

i) Die Standard Gleichungsform lautet

$$\text{Max } 3x_1 + x_2$$

u.d.N.

$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + x_3 &= 2\\
-x_1 + 2x_2 + x_4 &= 7\\
x_1 + x_5 &= 6\\
x_2 + x_6 &= 5\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0
\end{aligned}$$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	−3	−1	0	0	0	0	0
x_3	0	−2	1	1	0	0	0	2
x_4	0	−1	2	0	1	0	0	7
x_5	0	1	0	0	0	1	0	6
x_6	0	0	1	0	0	0	1	5

$\mathbf{x}^{0^T} = (0,0)^T$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	0	−1	0	0	3	0	18
x_3	0	0	1	1	0	2	0	14
x_4	0	0	2	0	1	1	0	13
x_1	0	1	0	0	0	1	0	6
x_6	0	0	1	0	0	0	1	5

$\mathbf{x}^{1^T} = (6,0)^T$

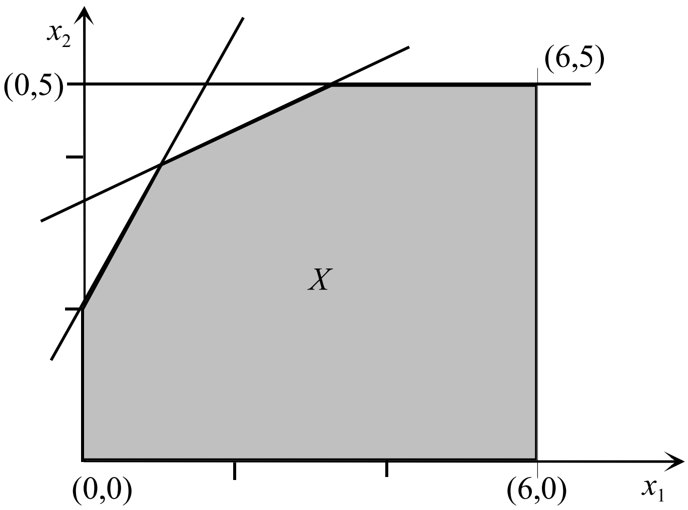
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_0	1	0	0	0	0	3	1	23
x_3	0	0	0	1	0	2	−1	9
x_4	0	0	0	0	1	1	−2	3
x_1	0	1	0	0	0	1	0	6
x_2	0	0	1	0	0	0	1	5

$\mathbf{x}^{2^T} = (6,5)^T$

Die optimale Lösung lautet

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (6, 5, 9, 3, 0, 0)^T.$$

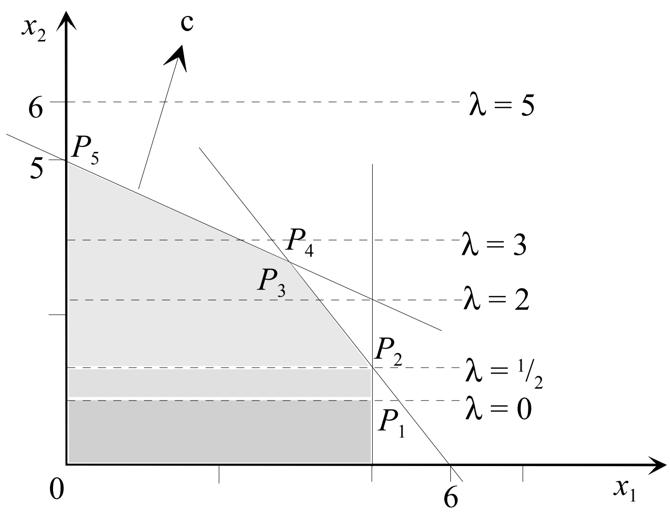
ii)



Die Ecken $(0,0)$, $(6,0)$ und $(6,5)$ sind die im laufe des obigen Verfahrens generierten zulässigen Basislösungen.

✓

Übungsaufgabe 8.3



Aus der Abbildung ergeben sich die Punkte $\mathbf{P}_1 = (5,1)$, $\mathbf{P}_2 = (5,\frac{3}{2})$, $\mathbf{P}_3 = (\frac{21}{5},3)$, $\mathbf{P}_4 = (3,4)$ und $\mathbf{P}_5 = (0,5)$ als optimale Lösungen für $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ und $\lambda = 5$, die mit den Werten der Tab. 8.1 übereinstimmen.

✓