Gliederung

Leseprobe

1 Einführung in die ganzzahlige Optimierung

Im Kurs 851 „Lineare Optimierung“ haben Sie bereits lineare Optimierungsprobleme kennen gelernt. In diesem Kurs werden nun LOPs betrachtet, für deren Strukturvariablen zusätzlich die Ganzzahligkeitsbedingung gilt.

Es sei f eine (reellwertige) Funktion in n Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ und $\overline{X}$ eine Teilmenge des $\boldsymbol{R}^n$. Dann nennt man

$$\text{Opt } z = f(x_1, ..., x_n) \tag{1.1}$$

u.d.N.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}} \in \overline{\boldsymbol{X}}, \tag{1.2}$$

$$x_1, x_2, ..., x_k \quad \text{ganzzahlig } (k \le n), \tag{1.3}$$

eine *gemischt-ganzzahlige Optimierungsaufgabe*. Sollen alle Variablen $x_1, ..., x_n$ nur ganzzahlige Werte annehmen, d.h. ist $k = n$, so liegt eine *rein-ganzzahlige* Optimierungsaufgabe vor.

Zielfunktion

Man bezeichnet f als *Zielfunktion*. In weitaus den meisten Fällen ist die Zielfunktion *linear*, d.h. f hat die Form

$$f(x_1, ..., x_n) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = c_1x_1 + ... + c_nx_n. \tag{1.4}$$

Menge der zulässigen Punkte

Durch (1.2) und (1.3) wird die *Menge* $\boldsymbol{X}$ *der zulässigen Punkte* beschrieben. $\boldsymbol{X}$ läßt sich meist durch lineare Ungleichungen, Nicht-negativitätsbedingungen und Ganzheitsforderungen beschreiben. In diesem Falle ist $\boldsymbol{X}$ die Menge aller $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, für die gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i\,, &\quad i = 1, ..., m, \\ x_j \ge 0, &\quad j = 1, ..., n, \\ x_1, ..., x_k &\quad \text{ganzzahlig.} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Faßt man die Koeffizienten a_{ij} zu einer $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ und die m Koeffizienten b_i zu einem Spaltenvektor $\mathbf{b}$ zusammen, so läßt sich $\boldsymbol{X}$ kurz durch

$$\boldsymbol{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge 0, x_1, ..., x_k \ \text{ ganzzahlig}\}$$

beschreiben. Ein Problem der Form

$$\mathrm{Opt}\,\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0,\ x_1, ..., x_k \ \ \text{ganzzahlig}\} \qquad \text{(MIP)}$$

gemischt-ganzzahliges lineares Programm

nennt man *gemischt-ganzzahliges lineares Programm*[1]. Ist $k = n$, so schreibt man

$$\mathrm{Opt}\,\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0, \ \ \text{ganzzahlig}\} \qquad \text{(IP)}$$

und nennt dieses Problem *(rein-) ganzzahliges lineares Programm*[2].

rein-ganzzahliges lineares Programm

Im Falle $n = 2$ kann man die Menge der zulässigen Punkte leicht zeichnerisch darstellen.

Beispiel 1.1

Man zeichne die Menge aller Punkte, für die gilt

$$\begin{aligned} -3x_1 + \ \ x_2 &\le \ 3 \\ x_1 + \ \ x_2 &\le \ 6 \\ 4x_1 - 3x_2 &\le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge \ 0 \\ x_1, x_2 \ \ &\text{ganzzahlig} \end{aligned}$$

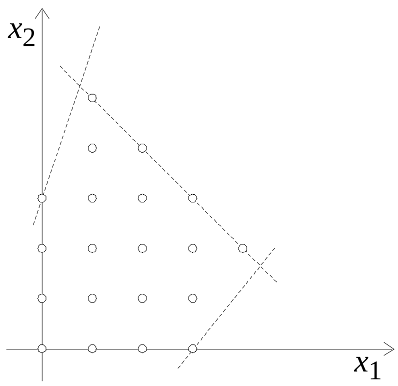

Abb.1.1: Menge der zulässigen Punkte zu Beispiel 1.1

Indem man nun die Zielfunktionswerte über der Menge $\boldsymbol{X}$ betrachtet, kann man leicht zeichnerisch ganzzahlige Optimierungsprobleme in zwei Variablen lösen.

[…]

1 Die Abkürzung MIP steht für *mixed integer program* und hat sich international eingebürgert.
2 IP steht hier als Abkürzung für *integer programm*.

Übungsaufgabe 1.2

Überlegen Sie sich ein Verfahren, das annähernd die Optimallösung des Rucksackproblems (1.7) bestimmt. Testen Sie Ihr Verfahren an

$$c_1 = 1,\quad c_2 = 3,\quad c_3 = 2,\quad c_4 = 5,\quad c_5 = 4$$
$$a_1 = 6,\quad a_2 = 7,\quad a_3 = 4,\quad a_4 = 2,\quad a_5 = 9$$
$$b = 19$$

[…]

1.2 Zusammenhang zwischen linearer und ganzzahliger Optimierung

Die im Kurs 851 behandelten linearen Programme der Form

$$\text{Opt } z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

u.d.N.

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \quad i = 1, \ldots, m$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$$

zählen zu jenen Optimierungsaufgaben, die sich in der Praxis leicht und effizient lösen lassen. Fordert man zusätzlich

$$x_1, \ldots, x_n \quad \text{ganzzahlig,}$$

so zeigt sich, daß man diese nunmehr ganzzahlige Optimierungsaufgabe im allgemeinen nur mit großem Aufwand lösen kann. Wir wollen im folgenden den prinzipiellen Unterschied zwischen linearen und ganzzahlig linearen Optimierungsaufgaben untersuchen.

Beispiel 1.3

Betrachten wir das folgende lineare Programm:

$$\max z = 2x_1 + x_2 \qquad \textbf{(1.16)}$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

bzw. das zugehörige ganzzahlige Programm, das man durch die Zusatzforderung

$$x_1, x_2 \quad \text{ganzzahlig}$$

erhält. In Abb. 1.3 sind die zulässigen Mengen dieser beiden Optimierungsprobleme dargestellt. Die Menge $\boldsymbol{X}_L$ der zulässigen Punkte des linearen Programms ist eine polyedrische, konvexe Menge, d.h. sie läßt sich als Schnittmenge von endlich vielen Halbräumen der Form $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \leq b_i\}$ darstellen. Die Verfahren der linearen Optimierung basieren nun darauf, daß eine Optimallösung, wenn sie existiert, in einer Ecke von $\boldsymbol{X}_L$ angenommen wird. Die Menge $\boldsymbol{X}_I$ der zulässigen Punkte des ganzzahligen Programms ist diskret, genauer: $\boldsymbol{X}_I$ enthält nur Punkte mit ganzzahligen Koordinaten, die in $\boldsymbol{X}_L$ liegen. Derartige Punkte wollen wir *Gitterpunkte* nennen. **Gitterpunkte**

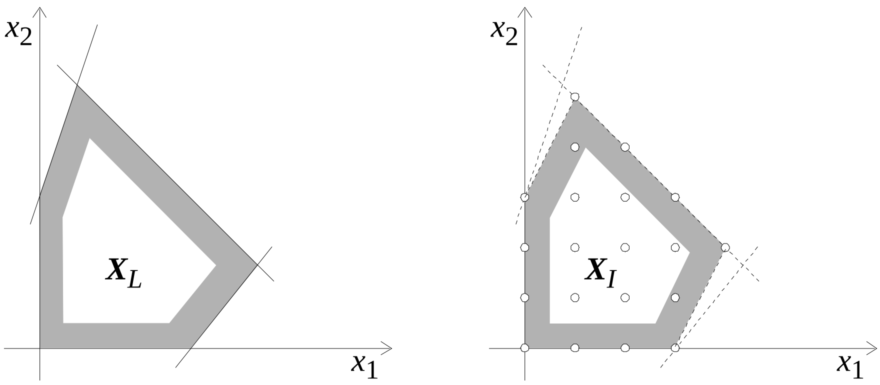

Abb.1.3: $\boldsymbol{X}_L$ ist zulässige Menge des linearen Programms (1.16), $\boldsymbol{X}_I$ zeigt die Gitterpunkte, die zulässige Lösungen des zugehörigen ganzzahligen Programms sind, sowie deren konvexe Hülle.

Die Frage, ob $\boldsymbol{X}_L$ überhaupt einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten enthält, ist i.a. sehr schwer zu entscheiden.

[…]

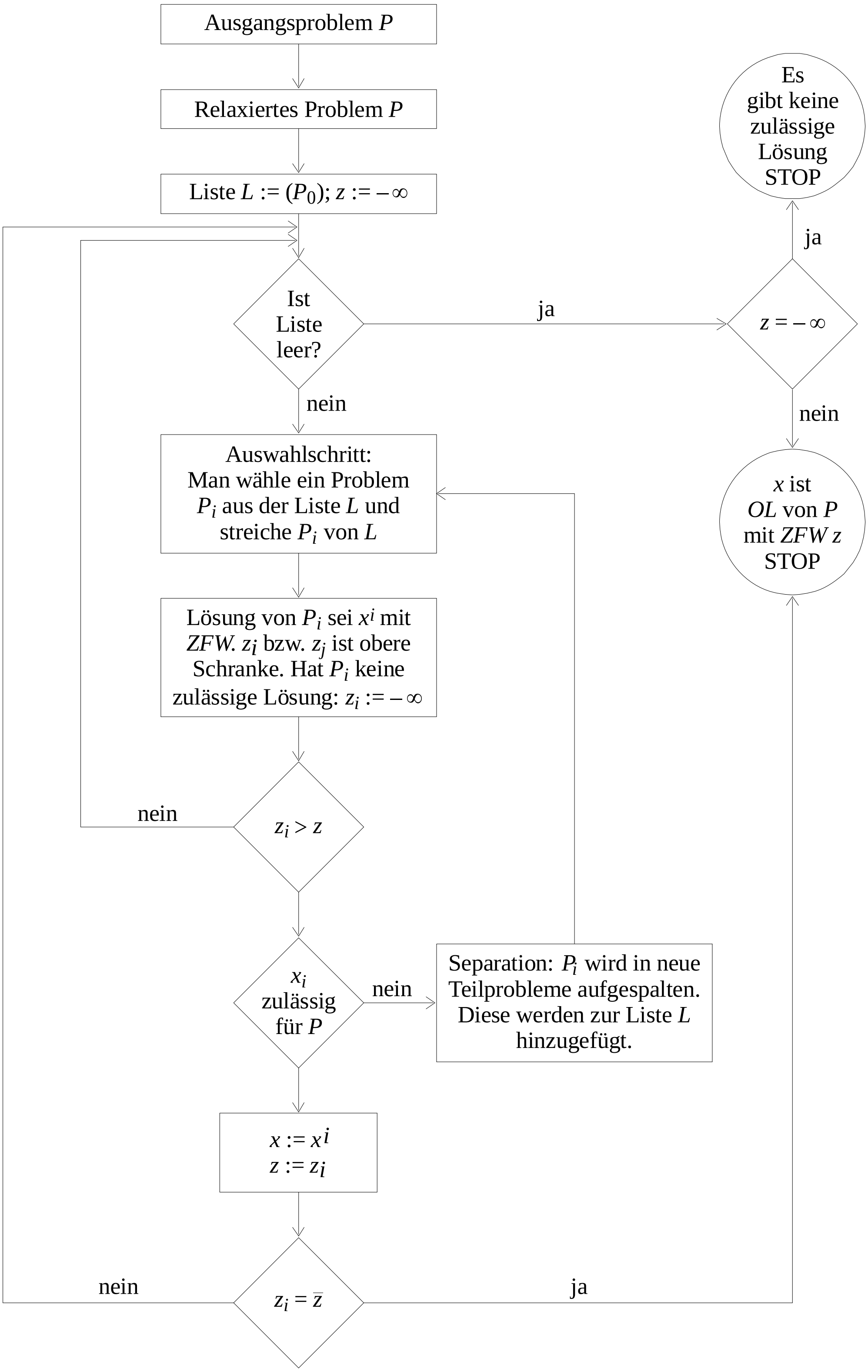

Abb. 2.3: Flußdiagramm zum allgemeinen Branch und Bound Verfahren für ein Maximierungsproblem. L enthält die Liste der noch nicht untersuchten Teilprobleme; $\overline{z}$ ist eine obere Schranke für den Zielfunktionswert von P; ZFW Zielfunktionswert; OL Optimallösung. Wird für P_i nur eine obere Schranke berechnet und keine zulässige Lösung x^i von P_i bestimmt, so ist die Abfrage „x^i zulässig für P“ mit NEIN zu beantworten.

[…]

2.2 Branch und Bound Verfahren zur Lösung gemischt-ganzzahliger linearer Programme

Man löse das rein-ganzzahlige lineare Problem

$$\max 2x_1 + x_2 + x_3$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\le 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_j \ge 0, \text{ ganzzahlig für } j &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Ein optimales Tableau für das zugehörige lineare Programm lautet

	x_1	x_4	x_5	b
	2	0	1	8
x_3	$7/3$	$1/6$	$1/2$	$14/3$
x_2	$5/3$	$-1/6$	$1/2$	$10/3$

und ergibt $\mathbf{x}^0 = \left(0, 10/3, 14/3\right)^{\mathrm{T}}$ mit $z = 8$.

Es gilt $I = \{1,2\}$ und $I_0 = \{1\}$. Da alle Elemente der ersten Zeile positiv sind, können wir die Restriktion $x_3 \le 4$ hinzufügen, die auf folgendes neue Tableau führt (vgl. Schritt 6)

	x_1	x_4	x_5	b
	2	0	1	8
s_3	$-7/3$	$-1/6$	$-1/2$	$-2/3$
x_2	$5/3$	$-1/6$	$1/2$	$10/3$

wobei $x_3 + s_3 = 4$, $0 \le s_3 \le 4$ gilt. Ein dualer Simplexschritt liefert:

	x_1	s_3	x_5	b
	2	0	1	8
x_4		$\cdots$		4
x_2		$\cdots$		4

Somit ist $\mathbf{x}^1 = (0, 4, 4)^{\mathrm{T}}$, da aus $s_3 = 0$ jetzt $x_3 = 4$ folgt. Damit wird $\mathbf{x} := (0, 4, 4)^{\mathrm{T}}$ und $z := 8$ gesetzt. Da die Liste L leer ist, ist dies die Optimallösung von (P).

[…]

3.4 Benders´Dekomposition

Beispiel 3.4

$$z = \max x + 4y$$

u.d.N.

$$\begin{aligned} 5x + 8y &\le 40 \\ -2x + 3y &\le 9 \\ x \ge 0&, \text{ ganzzahlig}, \\ y &\ge 0. \end{aligned}$$

(Vergleiche Beispiel 3.3). In diesem Fall ist

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zunächst bestimmen wir einen Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, für den gilt:

$$8u_1 + 3u_2 \ge 4, \quad u_1 \ge 0, u_2 \ge 0.$$

Es sei $u_1^1 = 1/2$, $u_2^1 = 0$. Nun wird $z^1 = 20$ und $\mathbf{c}^1 = 1 - 1/2 \cdot 5 = -3/2$. Daher haben wir zunächst die rein-ganzzahlige Optimierungsaufgabe

$$\max\{z \mid z \le 20 - 3/2\,\mathbf{x}, \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \text{ ganzzahlig}\}$$

zu lösen. Wir erhalten

$$\mathbf{x}^1 = 0, \ \bar{z} = 20.$$

Nun berechnen wir

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und lösen das LP

$$\min\{40u_1 + 9u_2 \mid 8u_1 + 3u_2 \ge 4, \quad u_1 \ge 0, u_2 \ge 0\}.$$

Ein dualer Simplexschritt liefert als Optimallösung

$$u_1^2 = 0, u_2^2 = 4/3.$$

Da die Optimalitätsbedingung 20 = 0 + 12 nicht erfüllt ist, berechnen wir nun

$$z^2 = 12$$

$$c^2 = 1 + \tfrac{8}{3} = \tfrac{11}{3}$$

und lösen das rein ganzzahlige Programm

$$\bar{z} = \max z$$

u.d.N.

$$z \le 20 - \tfrac{3}{2}\, x$$
$$z \le 12 + \tfrac{11}{3}\, x$$
$$x \ge 0, \text{ ganzzahlig.}$$

Die Optimallösung lautet $x^2 = 2$ und $\bar{z} = 17$. Wir berechnen nun

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 40 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 13 \end{pmatrix}$$

und lösen das LP

$$\bar{z} = \min 30u_1 + 13u_2$$

u.d.N.

$$8u_1 + 3u_2 \ge 4$$
$$u_1 \ge 0,\; u_2 \ge 0.$$

Die zugehörige Optimallösung lautet $u_1^3 = \tfrac{1}{2}, u_2^3 = 0$. Damit erhält man für die Optimalitätsbedingung

$$\bar{z} = 17 = 2 + 15 = c_1^{\mathrm{T}} x_2 + \bar{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^3.$$

Damit ist also die Abbruchbedingung erfüllt. Zur Bestimmung des Optimalwertes von **y** lösen wir nun

$$\max\{4y \mid 8y \le 30,\, 3y \le 13,\, y \ge 0\}.$$

Die Lösung ist $\bar{\mathbf{y}} = \tfrac{15}{4}$. Damit ist $\mathbf{x} = 2$, $\mathbf{y} = \tfrac{15}{4}$ und $z = 17$ die Optimallösung der gestellten Optimierungsaufgabe.

[…]

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1.2

Ein gutes Näherungsverfahren für das Rucksackproblem erhält man, wenn man die Quotienten $\frac{c_j}{a_j}$ der Größe nach ordnet

$$\frac{c_{j1}}{a_{j1}} \geq \frac{c_{j2}}{a_{j2}} \geq \cdots \frac{c_{jn}}{a_{jn}}$$

und mit den Gegenständen j_1, j_2, ... den Rucksack so lange auffüllt, bis die Kapazität erschöpft ist. Für die angegebenen Zahlen erhält man

$$\frac{c_4}{a_4} > \frac{c_3}{a_3} > \frac{c_5}{a_5} > \frac{c_2}{a_2} > \frac{c_1}{a_1}.$$

Also setzt man

$$x_4 = x_3 = x_5 = 1, x_2 = x_1 = 0.$$

Diese Lösung ergibt einen Zielfunktionswert $z = 11$. Die Optimallösung lautet

$$x_2 = x_4 = x_5 = 1, x_1 = x_3 = 0 \quad \text{mit } z = 12.$$

✓