

Gliederung

1. Grundlagen und Aufgabenstellungen einer Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

- 1.1. Beispiele
- 1.2. Aufgabenstellung eines Vektormaximumproblems
- 1.3. Aufgabenstellungen einer Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

2. Ermittlung funktionaleffizienter Lösungen eines Vektormaximumproblems

- 2.1. Parametrische Programme zur Lösung von Vektormaximumproblemen
- 2.2. Ermittlung der vollständigen Lösung eines linearen Vektormaximumproblems

3. Ermittlung einer Kompromißlösung mit Hilfe von Kompromißmodellen

- 3.1. Kompromißmodelle mit skalarer Präferenzfunktion
- 3.2. Kompromißmodelle bei vorgegebenem Zielwertvektor

4. Ermittlung einer Kompromißlösung unter Anwendung interaktiver Verfahren

- 4.1. Allgemeine Charakterisierung interaktiver Verfahren
- 4.2. Steuerung des Suchprozesses durch sukzessive Vorgabe von Untergrenzen bezüglich der Zielwerte
- 4.3. Steuerung des Suchprozesses durch eine Bewertung ausgewählter Trade-off-Verfahren

5. Software zur Optimierung bei mehrfacher Zielsetzung

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Leseprobe

Symbolverzeichnis

Menge der zulässigen Lösungen bzw. Lösungsmenge	X
Zulässige Lösung bzw. Element der Menge X	x', \tilde{x}, x^* etc.
Variablenvektor	$x = (x_1, \dots, x_n)^T$
q -te skalare Zielfunktion, $q = 1, \dots, r$	z_q oder $z_q(x)$
Vektorwertige Zielfunktion	$z = (z_1, \dots, z_r)^T$ oder $z(x) = (z_1(x), \dots, z_r(x))^T$
Zielkoeffizientenvektor der q -ten linearen Zielfunktion $z_q(x) = (c^q)^T x$, $q = 1, \dots, r$	$c^q = (c_1^q, \dots, c_n^q)^T$
$(n \times r)$ Zielkoeffizientenmatrix der linearen vektorwertigen Zielfunktion lineare vektorwertige Zielfunktion $z(x) = c^T x$	$C = (c^1, \dots, c^r)$
Technologische Matrix	$A = (a_{i\ell})_{m,n}$
Vektor der rechten Seite bzw. Begrenzungsvektor	$b = (b_1, \dots, b_m)^T$
Nullvektor	$0 \in \mathbf{R}^n$
Zielwertvektor einer zulässigen Lösung x'	$z' = z(x')$
Menge der Zielwertvektoren	$Z = z(x)$
Individuell optimale Lösung (bezüglich der skalaren Zielfunktion $z_q(x)$)	\hat{x}^q
Menge der bezüglich $z_q(x)$ individuell optimalen Lösungen	\hat{X}^q
Zielwert der individuell optimalen Lösung \hat{x}^q	$\hat{z}_q = z_q(\hat{x}^q)$
Idealer Zielwertvektor	$\hat{z} = (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r)^T$
Menge der perfekten Lösungen eines VMPs	\hat{X}
Leere Menge	\emptyset

Vollständige Lösung bzw. Menge aller funktional-effizienten Lösungen eines VMPs	X_E
Menge aller effizienten Zielwertvektoren	$Z_E = z(X_E)$
[...]	

1.1 Beispiele

Bei der Modellierung konkreter Planungsprobleme sind in vielen Situationen *gleichzeitig mehrere* Ziele zu berücksichtigen. So können im Rahmen einer Produktionsplanung beispielsweise die Zielsetzungen

- Maximierung des Deckungsbeitrages
- Maximierung der Kapazitätsauslastung
- Maximierung des Umsatzerlöses

verfolgt werden. Eine Investitionsplanung kann sich beispielsweise an den beiden Zielsetzungen

- Maximierung des Vermögens am Ende des Planungszeitraums
- Maximierung einer gleichbleibenden Mindestausschüttung in den einzelnen Planungsperioden

orientieren.

Auch bei der Modellierung von *Problemstellungen mit nur einer Zielsetzung* können sich *Planungsmodelle mit mehrfacher Zielsetzung* als sinnvoll erweisen. Im Rahmen einer Produktionsplanung für ein Geschäftsjahr werde die Maximierung des Deckungsbeitrages angestrebt. Die Deckungsbeiträge der einzelnen Produkte werden durch Faktoren bestimmt, deren Entwicklung das Unternehmen weder kontrollieren noch eindeutig vorhersagen kann. Man denke hier z.B. an die Entwicklung der Lohnkosten sowie der Preise der Produkte. Gelingt es, eine endliche Anzahl derartiger Konstellationen ergebnisbeeinflussender *Umweltzustände* u_q ($q = 1, \dots, r$) zu ermitteln und jedem u_q eine zu maximierende Zielfunktion z_q zuzuordnen, so liegen dem entsprechenden Planungsmodell r Zielsetzungen zugrunde.

In Verbindung mit der Planung eines Wertpapierportefeuilles wird davon ausgegangen, daß der einem Wertpapierportefeuille zuzuordnende Ertrag eine stochastische Größe ist. Die Maximierung einer stochastischen Größe erweist sich jedoch als eine nicht sinnvolle Zielsetzung. Aus diesem Grunde werden der stochastischen Zielfunktion – unter Heranziehung eines *Entscheidungsprinzips* (vgl. z.B. BITZ, 1981, S.87ff.) – in der Regel mehrere deterministische Er-

satzzielsetzungen zugeordnet: Legt man beispielsweise als Entscheidungsprinzip das $\mu - \sigma$ Prinzip (vgl. z.B. BITZ, 1981, S.98ff.) zugrunde, wobei μ hier den Erwartungswert des Ertrages und σ als Risikomaß die Streuung des Ertrages um den Erwartungswert bezeichnet, so lassen sich bei einem risikoscheuen Anleger für die Planung eines Wertpapierportefeuilles folgende Ersatzzielsetzungen formulieren:

Maximierung des Erwartungswertes des Ertrages

Minimierung der Streuung des Ertrages.

Diese Beispiele machen deutlich, daß vielen konkreten Problemstellungen Optimierungsprobleme mit mehrfacher Zielsetzung zugeordnet werden können. Wir wollen nunmehr ein Optimierungsproblem mit mehreren Zielfunktionen formulieren sowie die ihm zugrundeliegende Aufgabenstellung präzisieren.

[...]

1.2 Aufgabenstellung eines Vektormaximumproblems

Beispiel 1.1

Betrachten wir das folgende LVMP:

$$\text{"max"} \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N.

$$\begin{array}{rcll} x_1 + 3x_2 & \leq & 42 & \\ x_1 + x_2 & \leq & 20 & \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 30 & \\ x_1 & \geq & 3 & \\ x_2 & \geq & 2 & \\ x_1, x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

In Abbildung 1.1 ist für dieses LVMP die Lösungsmenge, das Polyeder X , mit den 5 Eckpunkten x^1, \dots, x^5 , dargestellt. Für die Eckpunkte sind die Werte der Variablen x_1 und x_2 und die der Zielfunktionen $z_1(x)$ und $z_2(x)$ in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

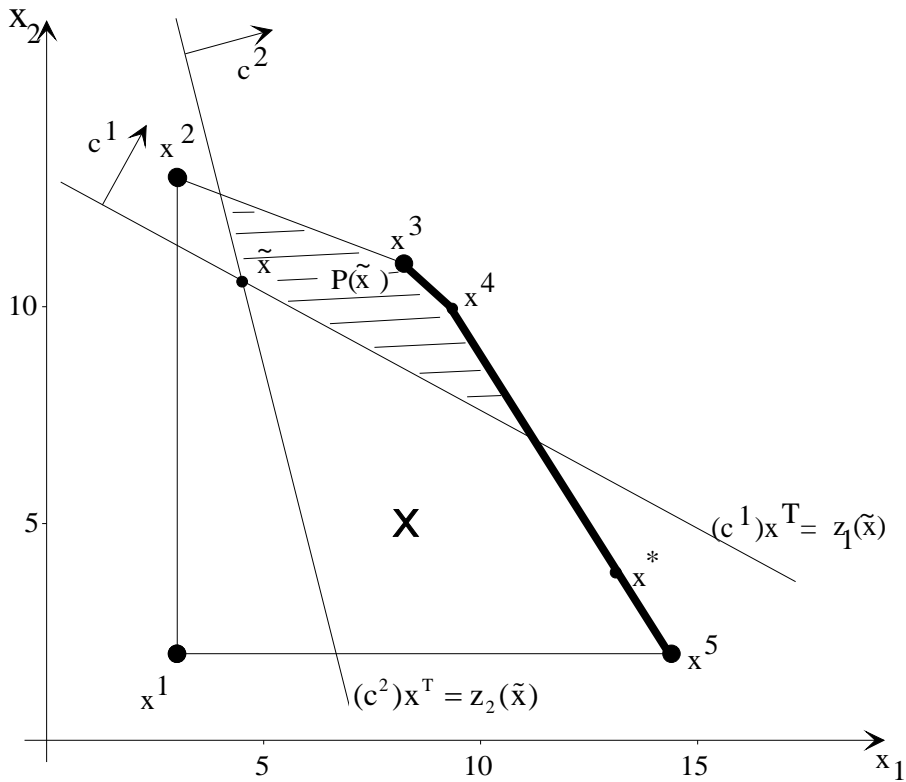


Abbildung 1.1 Graphische Darstellung und Menge X und X_E

Tabelle 1.1: Ecken und Zielfunktionswerte

	$x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$x^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$	$x^3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$	$x^4 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$	$x^5 = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$
$z_1(x^k)$	7	29	31(max)	30	18
$z_2(x^k)$	14	25	47	50	58(max)

Indem wir zu jedem $x \in X$ die zugehörigen Werte $z_1(x)$ und $z_2(x)$ berechnen, erhalten wir die in Abbildung 1.2 im z_1 - z_2 -Koordinatensystem dargestellte Menge der Zielwertvektoren $Z = \{z(x) \mid x \in X\}$.



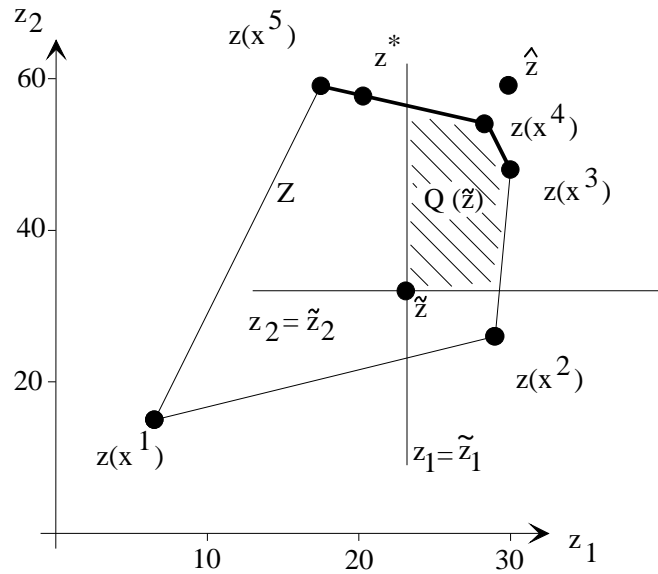


Abbildung 1.2: Graphische Darstellung der Menge Z und Z_E

[...]

2.2 Ermittlung der vollständigen Lösung eines linearen Vektormaximumproblems

[...]

Übungsaufgabe 2.3

- Stellen Sie das Mehrziel-Simplextableau zur funktionaleffizienten Basislösung x^2 auf.
- Ermitteln Sie alle zu x^2 benachbarten funktionaleffizienten Basislösungen. Stellen Sie zu diesen funktional-effizienten Basislösungen die zugehörigen Mehrziel-Simplextableaus auf.
- Wie lauten die effizienten Trade-off-Vektoren des zu x^2 gehörigen Mehrziel-Simplextableaus?



[...]

3.1 Kompromißmodelle mit skalarer Präferenzfunktion

Satz 3.1

Ist $\phi(z(x))$ eine in z für $z \in Z$ *streng* monoton wachsende Funktion, dann ist jede optimale Lösung von (3.1) eine funktional-effiziente Lösung von (1.1).



Sofern $\phi(z(x))$ eine in z für $z \in Z$ *monoton wachsende* Funktion ist, ist mindestens eine optimale Lösung von (3.1) eine funktional-effiziente Lösung von (1.1) (vgl. z.B. KOSMOL, 1973, S.79). Hat (3.1) nur eine optimale Lösung, so ist sie auch eine funktional-effiziente Lösung von (1.1). Existieren mehrere optimale Lösungen von (3.1), so können unter ihnen auch nicht funktional-effiziente Lösungen von (1.1) sein. Dies illustriert das folgende Beispiel:

Beispiel 3.1

Gegeben sei das LVMP

$$\text{"max"} \quad z(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

u.d.N.

$$6x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{sowie } \phi(z(x)) = (1, 0) \quad z(x) = 3x_1 + x_2.$$

$\phi(z(x))$ ist eine in z monoton wachsende Funktion.

Die Menge der bezüglich $\phi(z(x))$ optimalen Lösungen lautet:

$$X^* = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

Wir erhalten $X^* \cap X_E = (0, 6)^T$, so daß $x^* = (0, 6)^T$ jene bezüglich $\phi(z(x))$ optimale Lösung ist, die gleichzeitig funktional-effiziente Lösung des LVMPs ist.



[...]

3.2 Kompromißmodelle bei vorgegebenem Zielwertvektor

Den Ausgangspunkt dieser Kompromißmodelle bilden ein vom ET angegebener Zielwertvektor \bar{z} sowie eine zu minimierende Präferenzfunktion φ . Hierbei wird davon ausgegangen, daß der ET die Zielwertvektoren $z(x)$ ($x \in X$) auf der Grundlage ihrer *Abweichung vom angegebenen Zielwertvektor* \bar{z} ordnet und diese Ordnung durch die zu minimierende Präferenzfunktion φ repräsentiert werden kann.

Es sei $w(x) = \bar{z} - z(x)$ der Vektor der Abweichungen bei vorgegebenem Zielwertvektor \bar{z} . Die (Präferenz-) Abbildung $\varphi: w(X) \rightarrow \mathbf{R}$ ordnet jedem $w(x)$ mit $x \in X$ eine reelle Zahl $\varphi(w(x)) \in \mathbf{R}$ zu, so daß für je zwei Vektoren $w(x')$, $w(x'') \in w(X)$ gilt:

$$w(x'') \text{ wird nicht } w(x') \text{ vorgezogen} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(w(x')) \leq \varphi(w(x''))$$

$$w(x') \text{ wird } w(x'') \text{ vorgezogen} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(w(x')) < \varphi(w(x''))$$

$$\text{zwischen } w(x') \text{ und } w(x'') \text{ besteht Indifferenz} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(w(x')) = \varphi(w(x'')).$$

Bei bekannter Präferenzfunktion $\varphi(w(x))$ ist das Entscheidungsproblem bis auf die Minimierung der Präferenzfunktion gelöst. Die gesuchte Kompromißlösung ist optimale Lösung des Kompromißprogramms bei vorgegebenem Zielwertvektor \bar{z}

$$\min \{ \varphi(w(x)) \mid x \in X, z(x) + w(x) = \bar{z} \}. \quad (3.2)$$

**Kompromißmodell
bei vorgegebenem
Zielwertvektor \bar{z}**

In vielen Fällen wird dem Kompromißprogramm (3.2) als vorgegebener Zielwertvektor der ideale Zielwertvektor, also $\bar{z} = \hat{z}$, zugrunde gelegt¹. Unter dieser Voraussetzung und der zusätzlichen Annahme, daß $\varphi(w(x))$ eine in w für $w(x) \in w(X)$ streng monoton wachsende Funktion ist, ist jede optimale Lösung von (3.2) mit $\bar{z} = \hat{z}$ zugleich funktional-effiziente Lösung von (1.1) (vgl. hierzu ISERMANN, 1974, S.72).

[...]

¹ Wegen $\hat{z} - z(x) \geq 0 \forall x \in X$ erhalten wir $w(x) \geq 0 \forall x \in X$.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 2.3

a) Das Mehrziel-Simplextableau zur funktional-effizienten Basislösung x^2 lautet

ρ_2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	0	1	0	2	-1	0	2
3	1	0	1	-1	1	0	1
6	1	0	0	2	-1	1	6
Δz_ℓ^1	-3	0	0	1	-1	0	-1
Δz_ℓ^2	0	0	0	7	-4	0	5
Δz_ℓ^3	6	0	0	-6	5	0	2
$\Delta z_\ell(t')$	0	0	0	$\frac{5}{15}$	0	0	
$\Delta z_\ell(t'')$	0	0	0	0	$\frac{5}{25}$	0	

b) Für $\ell' = 1$ erhält das System (2.7) die Form

$$\begin{aligned}
 -3t_1 + 6t_3 &= 0 & (\ell' = 1) \\
 t_1 + 7t_2 - 6t_3 &\geq 0 & (\ell = 4) \\
 -t_1 - 4t_2 + 5t_3 &\geq 0 & (\ell = 5) \\
 t_1 + t_2 + t_3 &= 1 \\
 t_q &\geq 0 & (q = 1, 2, 3)
 \end{aligned}$$

$t' = (\frac{8}{15}, \frac{3}{15}, \frac{4}{15})^T$ ist eine Lösung dieses Systems, bei der auch die zu $\ell = 5$ gehörige Ungleichung als Gleichung erfüllt ist. Eine Pivotierung in der ersten Spalte führt zu der zu x^2 benachbarten funktional-effizienten Basislösung x^1 . Das zu x^1 gehörige Mehrziel-Simplextableau kann der Tabelle 2.2 entnommen

werden. Eine Pivotierung in der fünften Spalte führt zu der zu x^2 benachbarten funktional-effizienten Basislösung x^4 mit dem Mehrziel-Simplextableau

ρ_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
2	1	1	1	1	0	0	3
5	1	0	1	-1	1	0	1
6	2	0	1	1	0	1	7
Δz_ℓ^1	-2	0	1	0	0	0	0
Δz_ℓ^2	4	0	4	3	0	0	9
Δz_ℓ^3	1	0	-5	-1	0	0	-3

Mit $\ell' = 4$ erhalten wir für das System (2.7) die Lösung $t'' = (14/25, 4/25, 7/25)^T$. Eine Pivotierung in der 4. Spalte des zu x^2 gehörigen Mehrziel-Simplextableaus führt zu der zu x^2 benachbarten funktional-effizienten Basislösung x^5 mit dem Mehrziel-Simplextableau

ρ_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	0	$1/2$	0	1	$-1/2$	0	1
3	1	$1/2$	1	0	$1/2$	0	2
6	1	-1	0	0	0	1	4
Δz_ℓ^1	-3	$-1/2$	0	0	$-1/2$	0	-2
Δz_ℓ^2	0	$-7/2$	0	0	$-1/2$	0	-2
Δz_ℓ^3	6	3	0	0	2	0	8

- c) Die effizienten Trade-off-Vektoren lauten aufgrund der in b) ermittelten Ergebnisse: $(3, 0, -6)^T$, $(-1, -7, 6)^T$, $(1, 4, -5)^T$. ✓

