Gliederung

Kurseinheit 1 »Grundlagen der Graphentheorie«

Kurseinheit 2 »Standortplanung und Transportoptimierung«

Leseprobe Kurseinheit 1

1. Grundbegriffe

In Kapitel 1 werden Sie die grundlegenden mit Graphen und Netzwerken zusammenhängenden Begriffe, die in dieser Kurseinheit benötigt werden, kennenlernen[1]. Es ist für die Graphentheorie charakteristisch, dass schon für die Beschreibung einfacher Modelle und Probleme eine große Zahl von Begriffen notwendig ist. Da viele dieser Begriffe aber unmittelbar einleuchtend und durch ähnliche oder gleich lautende Bezeichnungen aus dem gewöhnlichen Sprachgebrauch leicht ableitbar sind, wird Sie das Verstehen und Einprägen dieser Begriffe nicht sehr stark belasten.

1.1 Praktische Probleme, die auf Graphen und Netzwerke führen

Um Ihnen einen Eindruck von der Verschiedenartigkeit der Probleme zu vermitteln, die mit Hilfe von Graphen beschrieben werden können, wollen wir in diesem einführenden Abschnitt einige Beispiele betrachten.

Beispiel 1.1

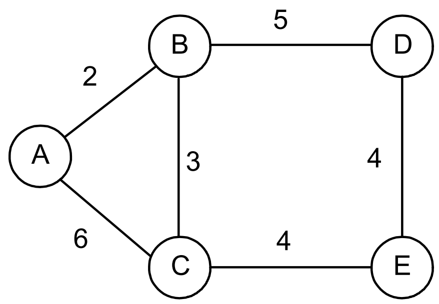


Abb. 1.1: Straßennetz

5 Orte A, B, C, D, E sind durch ein Straßennetz miteinander verbunden, das in Abb.1.1 veranschaulicht ist. Die Orte sind durch sogenannte *Knoten* und die direkten Straßenverbindungen zwischen benachbarten Orten durch Linien oder, wie man auch sagt, *Kanten* dargestellt. Die Entfernungen (in km) sind an den betreffenden Kanten notiert. Gesucht sind die (kürzesten) Entfernungen zwischen

Knoten

Kanten

[1] Einige dieser Grundbegriffe kennen Sie schon aus dem Kurs 00512 „Planungs- und Entscheidungstechniken (PET)“.

je 2 Orten sowie die entsprechenden Straßenverbindungen. Beispielsweise beträgt die Entfernung der Orte A und E 9 km, und die zugehörige Straßenverbindung führt über die Orte B und C.

Graph
bewerteter Graph

Das in Abb. 1.1 veranschaulichte System von Knoten und Kanten wird *Graph* genannt. Da die Kanten des Graphen mit Zahlen (in Beispiel 1.1 Entfernungen) „bewertet" sind, spricht man auch von einem *bewerteten Graphen*.

gerichtete Kante
Pfeil
gerichteter Graph
Digraph

Darf in Beispiel 1.1 eine Straße nur in einer Richtung durchfahren werden, so kennzeichnen wir diese Richtung durch eine Pfeilspitze. Die zugehörige *gerichtete Kante* wird dann auch *Pfeil* genannt. Ein Graph, dessen Kanten sämtlich gerichtet sind, heißt *gerichteter Graph* oder *Digraph* (englisch „directed graph").

[…]

3.2 Kürzeste Wege von einem zu allen Knoten (Baumalgorithmen)

Die Bestimmung kürzester Wege in Netzwerken gehört zu den wichtigsten für die Anwendungen relevanten Aufgaben der Graphentheorie. Beispielsweise führen die Ermittlung kürzester oder kostengünstigster Verbindungen in Verkehrsnetzen und die Terminplanung für Projekte auf die Bestimmung kürzester bzw. längster Wege. Die Berechnung tritt auch oft als Unterproblem im Rahmen umfangreicherer Aufgaben auf, etwa bei gewissen Fluss-, Transport- und Umladeproblemen (s. DOMSCHKE (1979), NEUMANN / MORLOCK (1993)) und beim sogenannten Briefträgerproblem (vgl. LAWLER (1976)).

Startknoten
Zielknoten

Im vorliegenden Abschnitt 3.2 werden wir einige grundsätzliche Bemerkungen über kürzeste Wege von einem Knoten a (genannt *Startknoten*) zu allen übrigen Knoten eines Netzwerkes machen. Algorithmen zur Bestimmung solcher kürzesten Wege werden in den Abschnitten 3.3, 3.4, 3.5 angegeben. Insbesondere erhalten wir damit auch kürzeste Wege von einem Startknoten a zu einem *Zielknoten* b. Ist in einem Netzwerk N ein Zielknoten b vorgegeben und sind kürzeste Wege von allen von b verschiedenen Knoten nach b gesucht, so kehrt man die Richtungen aller Pfeile in N um, d.h., man ersetzt jeden Pfeil $<i,j>$ von N durch den Pfeil $<j,i>$ unter Beibehaltung der Bewertung. In dem so entstandenen Netzwerk bestimmt man dann kürzeste Wege von b zu allen übrigen Knoten.

[…]

Netzwerke

Wir werden uns auf die Bestimmung kürzester Wege in *Netzwerken* beschränken. Kürzeste Ketten in einem bewerteten Graphen $G = [V, E; c]$ mit nichtnegativer

Bewertungsfunktion c erhält man, indem man in dem „zugehörigen" symmetrischen Digraphen $\vec{G}$ (vgl. Abschnitt 1.2), wobei die Bewertung der Pfeile <i, j> und <j, i> von $\vec{G}$ gleich der Bewertung der Kante $[i, j]$ von G ist, kürzeste Wege bestimmt.

[…]

Wir legen stets ein Netzwerk $N = <V, E; c>$ mit reellwertiger Gewichtsfunktion c und, wie schon oben erwähnt, der Knotenmenge $V = \{1, ..., n\}$ zugrunde. Wie in Abschnitt 1.7 setzen wir

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i = j \\ c\langle i,j\rangle, & \text{falls } \langle i,j\rangle \in E \quad (i,j = 1,\ldots,n) \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

(vgl. (1.5)). Wir setzen voraus, dass N keine Zyklen negativer Länge enthält. Wir suchen kürzeste Wege von einem Startknoten a in N zu allen übrigen von a aus erreichbaren Knoten j von N sowie die entsprechenden Weglängen (Entfernungen).

Sei

$$d_j = \begin{cases} 0, & \text{falls } j = a \\ d\langle a,j\rangle, & \text{falls } j \in \dot{R}(a) \quad (j = 1,\ldots,n) \\ \infty, & \text{falls } j \notin R(a) \end{cases} \tag{3.1}$$

wobei $d<a, j>$ die Entfernung von a nach j ist (vgl. Kapitel 1.7). Für $j \in \dot{R}(a)$ sei $F_j = \langle a,\ldots,k,j\rangle$ ein kürzester Weg von a nach j. $<k, j>$ ist also der „letzte Pfeil" auf diesem Weg. Der Teil $F_k = \langle a,\ldots,k\rangle$ des Weges F_j muss ebenfalls ein kürzester Weg (und zwar von a nach k) sein. Gäbe es nämlich einen kürzeren Weg von a nach k, etwa F_k', so würde F_k' zusammen mit dem Pfeil $<k, j>$ einen Weg von a nach j liefern , der kürzer als der kürzeste Weg F_j wäre. Es gilt also $d_j = d_k + c_{kj}$.

Optimalitätsprinzip

Dass Teilwege kürzester Wege selbst wieder kürzeste Wege darstellen, ist ein Spezialfall des sogenannten *Optimalitätsprinzips* der dynamischen Optimierung. In der Beziehung $d_j = d_k + c_{kj}$ muss k offensichtlich derart gewählt werden, dass $d_k + c_{kj}$ so klein wie möglich ist. In anderen Worten, wir müssen das Minimum der Werte $d_k + c_{kj}$ bilden, wobei k alle Vorgänger von j durchläuft.

Bellmansche Gleichungen

Die Entfernungen d_j genügen folglich den sogenannten *Bellmanschen Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned} d_a &= 0 \\ d_j &= \min_{k \in P(j)} (d_k + c_{kj}), \quad \text{falls } j \in \dot{R}(a). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

[…]

Leseprobe Kurseinheit 2

[…]

5.2 Mediane und Zentren

5.2.1 Grundbegriffe und Definitionen

Modellgrundlage ist ein bewerteter ungerichteter Graph $G = [V, E, c; b]$, wobei die Bewertung c zunächst o.B.d.A. als Entfernung interpretiert wird. Gewichte b sind den Knoten zugeordnet, und es können etwa vorhandene Angebote oder Bedarfe quantifiziert werden. Die Länge einer kürzesten Kantenfolge mit den Endknoten i, j in einem bewerteten Graphen G heißt *Entfernung* (oder *Distanz*) der Knoten i und j, in Zeichen $d[i, j]$. Enthält G keine Kreise negativer Länge, so existiert für je zwei verschiedene Knoten $i, j \in V$, die miteinander verbunden sind, eine kürzeste Kantenfolge mit den Endknoten i, j und folglich die Entfernung $d[i, j]$. Sind zwei Knoten i, j von G nicht miteinander verbunden, so ist $d[i, j] = \infty$. Für die eingangs formulierten Lokationsprobleme verfolgt man naturgemäß eine knotenorientierte Betrachtung. So ist für ein Unternehmen etwa die Frage von Interesse, wie kann der Transportaufwand vom Standort aus zu allen Nachfragern bei unterschiedlichen Bedarfen bewertet werden. Formal bestimmt man hierzu für einen Knoten i die gewichtete Distanz $\sigma(i)$ zu allen Knoten $j \in V$, $j \neq i$. Für diese Berechnung ist es erforderlich, dass die kürzesten Entfernungen vom Knoten i zu allen anderen Knoten bekannt sind. Sollten diese Informationen nicht vorliegen, so ist vorab zunächst ein geeigneter Algorithmus zur Erstellung einer vollständigen Entfernungsmatrix anzuwenden (vgl. Abschnitte 3.2ff. der KE1).

Entfernung / Distanz

$$\sigma(i) = \sum_{j \in V} d[i, j] \cdot b_j$$

[…]

Übungsaufgabe 5.2

Die fünf Dörfer **A**alhus, **B**orscheidt, **C**hurtingen, **D**alenkamp und **E**stringen im Hochsauerland sind durch nur wenige Straßen miteinander verbunden; die Längen der direkten Verbindungen entnehmen Sie bitte folgender Matrix D. (Erinnerung: ∞ bedeutet, es gibt keine direkte Verbindung.)

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 2 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 8 \\ 3 & \infty & 9 & 0 & \infty \\ \infty & 7 & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeichnen Sie einen Graphen, durch den die obige Situation visualisiert wird und der alle Angaben enthält. Welche Verbindungen sind nur in einer Richtung befahrbar?

b) Ein Dorf soll durch die Ansiedlung eines Einkaufszentrums aufgewertet werden. Analysen haben ergeben, dass von **A**alhus, **B**orscheidt und **C**hurtingen aus mit je 1000 Einkäufen pro Tag zu rechnen ist. **D**alenkamp und **E**stringen dagegen sind größer; von hier aus werden 2000 Einkäufe täglich erwartet.
In welchem Dorf sollte das Einkaufszentrum gebaut werden, damit die Gesamtfahrstrecke für alle Tageseinkäufe minimal ist.

c) Eine weitere Standortfrage beschäftigt die dortige Feuerwehr. In welchem Dorf sollte die neue Feuerwehrstation gebaut werden, damit bei einem Einsatz der Weg zum am weitesten entfernt liegenden Dorf am kürzesten ist.

[…]

6. Modellierung von Transportproblemen

[…]

Beispiel 6.1

Ein homogenes Gut, das von den Lieferanten L_i in den Mengen a_i angeboten wird, soll zu den Kunden K_j mit den Nachfragen b_j transportiert werden. Die Kosten des Transportes einer Mengeneinheit vom Lieferanten L_i zum Kunden K_j seien c_{ij}.

Tab. 6.1 Ausgangsdaten des Transportproblems

		Kunden				Angebot
		K_1	K_2	K_3	K_4	a_i
Lieferanten	L_1	12	8	11	7	100
	L_2	9	13	10	6	150
	L_3	11	7	9	14	90
Nachfrage	b_j	80	140	70	50	

Wie viele Mengeneinheiten x_{ij} sollen vom Lieferanten L_i zum Kunden K_j transportiert werden, damit die Nachfrage erfüllt ist und die gesamten Transportkosten minimiert werden?

Allgemein formuliert lautet das *Transportproblem*: Ein homogenes Gut, das an den Orten A_i, i=1,...,m, in den Mengen a_i angeboten wird, soll zu den Orten B_j, j = 1,...,n, transportiert werden, an denen eine Nachfrage von b_j besteht. Die Kosten des Transportes einer Mengeneinheit (ME) von Ort A_i zum Ort B_j betragen c_{ij}. Wieviele ME sollen vom Ort A_i zum Ort B_j transportiert werden, so dass die Nachfrage erfüllt wird und die Gesamttransportkosten minimal sind ?

[…]

Das dem Beispiel 6.1 analoge Datenschema hat dann die Form der Tab. 6.2.

Tab. 6.2: Daten zum Transportproblem

		Nachfrageorte				Angebot
		B_1	B_2	...	B_n	a_i
Angebotsorte	A_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
	A_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
	.	.	.	...	.	.
	.	.	.	...	.	.
	A_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
Nachfrage	b_j	b_1	b_2	...	b_n	

klassisches Transportproblem

Das Problem der Transportkostenminimierung wird in dieser Form allgemein als das *klassische Transportproblem* bezeichnet. Es handelt sich um den einfachsten Spezialfall eines allgemeinen Transportproblems, das in Kapitel 8 ausführlich behandelt wird.

[…]

9.1 Das Zuordnungsproblem

[…]

Als Sonderfall des klassischen Transportproblems (a_i = 1, i = 1,...,n; b_j = 1, j=1,...,n) lässt sich das Zuordnungsproblem selbstverständlich als Fluss- bzw. als *Zirkulationsflussproblem* darstellen und formulieren.

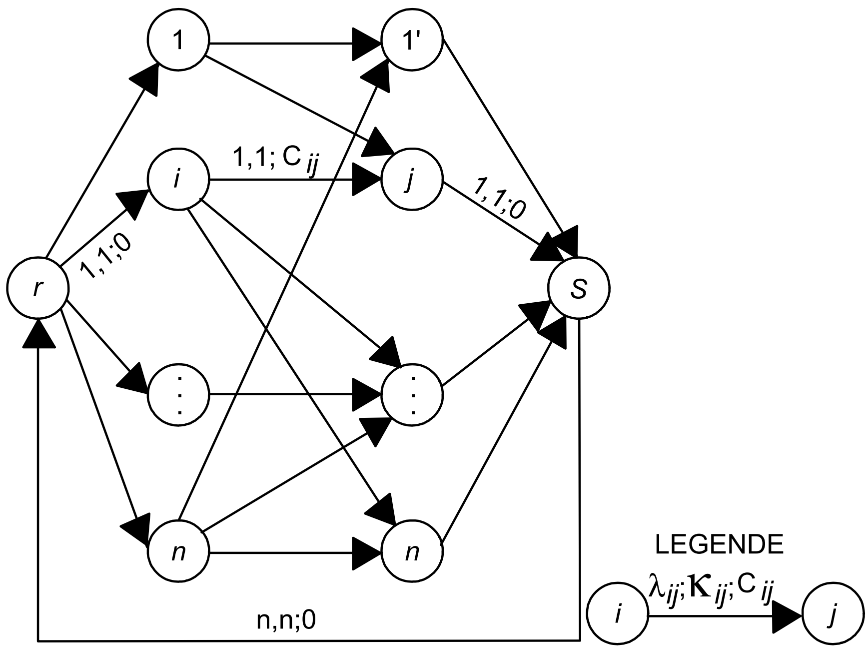


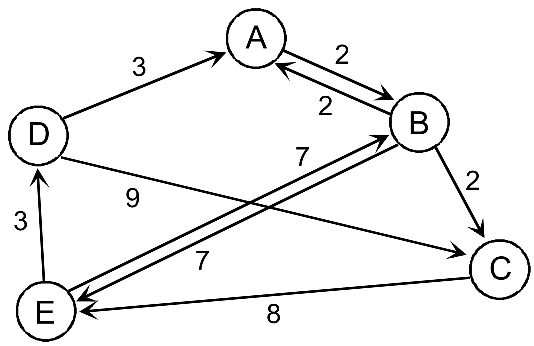
Abb. 9.1: Darstellung des Zuordnungsproblems als Zirkulationsproblem in $N =< V, E; \lambda, \kappa; c >$

Lösungen der Übungsaufgaben

[…]

Übungsaufgabe 5.2

a)



Dem Graphen ist zu entnehmen, dass die Verbindungen von <B,C>, <C,E>, <D,A>, <D,C> und <E,D> nur in einer Richtung befahrbar sind.

b) Für den Einkauf sind jeweils die Hin- und Rückfahrt auf dem kürzesten Weg zu betrachten. Aus dem in a) erstellten Graphen sind deshalb entsprechend die kürzesten Entfernungen zwischen allen Knoten abzulesen und in einer Distanzmatrix zusammenzustellen. Für einen komplexeren Graphen liefert der Tripelalgorithmus das gewünschte Ergebnis.

$$D^* := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 12 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 10 & 7 \\ 14 & 15 & 0 & 11 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 12 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Anzahl der zu erwartenden Einkäufe je Dorf unterschiedlich ist, muss eine zusätzliche Gewichtung vorgenommen werden. Die Ergebnisse (in 1000 km) sind in der nachfolgenden Matrix zusammengefasst:

$$\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 12 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 10 & 7 \\ 14 & 15 & 0 & 11 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 12 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 48 \\ 38 \\ 67 \\ 39 \\ 28 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 34 & 41 & 38 & 39 & 48 \end{matrix} & \end{array}$$

Somit ergibt sich beispielsweise bei einer Wahl des Standorts „Aalhus“, dass von allen Einkaufenden aus den verschiedenen Dörfern insgesamt zunächst einmal 34.000 km zurückzulegen sind, um zum Kaufhaus zu gelangen, und dann 48.000 km, um wieder nach Hause zu kommen. In der Summe berechnet sich für A: 82.000 km, für B: 79.000 km, für C: 105.000 km, für D: 78.000 km und für E: 76.000 km. Das Kaufhaus sollte somit unter den gegebenen Annahmen in Estringen gebaut werden.

d) Für den Bau des Feuerwehrhauses ergibt sich folgende Situation. Hier muss nur der zurückzulegende Weg zum Einsatzort betrachtet werden. Da die weiteste Entfernung minimal sein soll, ist allerdings auch hier der Standort Estringen zu wählen. In folgender Übersicht ist die weiteste Entfernung vom Standort aus rechts neben der Matrix notiert. Für Estringen ist der Wert mit 9 km minimal.

$$\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 12 & 9 \\ 2 & 0 & 2 & 10 & 7 \\ 14 & 15 & 0 & 11 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 12 \\ 6 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 12 \\ 10 \\ 15 \\ 12 \\ 9 \end{matrix} \end{array}$$

✓