



**Bachelormodul 31541 zum Bachelorstudium
Wirtschaftswissenschaft (B.Sc.)
an der FernUniversität in Hagen**

Demo-Kurs

Kurs „41540“

Produktionsprogrammplanung

von

Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. Günter Fandel

und

Internationale Dipl.-Kff. Allegra Fistek

Das Modul „Produktionsplanung“ (31541) umfasst die drei Kurse „Produktionsprogrammplanung“ (41540), „Mehrstufige Fertigung“ (41541) und „Ausgewählte Probleme der Produktionsplanung“ (41542). Im Folgenden werden aus dem ersten Kurs 41540 einige Inhalte exemplarisch dargestellt.

Produktions- und Unternehmensplanung

Die Aufzählung der einzelnen Planungsprobleme im Produktionsbereich könnte den Eindruck erwecken, dass jedes Teilplanungsproblem für sich einen abgeschlossenen Aufgabenkreis bildet und die Entscheidungen im Erzeugungsbereich optimal gefällt sind, wenn für die einzelnen Teilplanungen eine bestmögliche Lösung erzielt worden ist. Die vielseitigen Verflechtungen und Beziehungen innerhalb des industriellen Fertigungsvorgangs zeigen aber, dass die Teilplanungsprobleme nicht unabhängig voneinander sind, sondern zwischen ihnen vielmehr **wechselseitige Einflüsse** bestehen, die sich auf die optimale Gestaltung der Teillösungen auswirken.

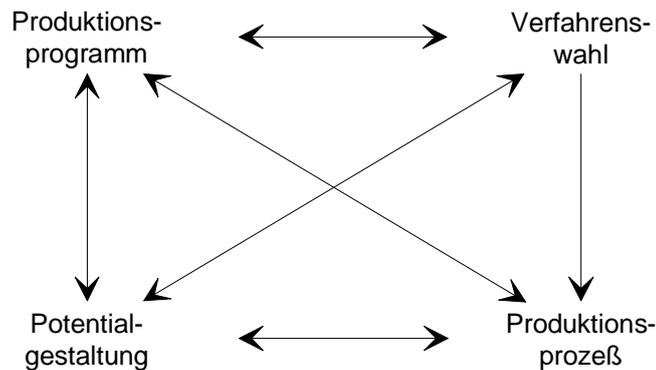


Abb. 8: Abhängigkeiten zwischen den Teilplanungen

Für die Bestimmung des optimalen Produktionsprogramms ist beispielsweise von den Voraussetzungen ausgegangen worden, dass die Wahl der besten Produktionsverfahren zur Herstellung der gewünschten Erzeugnismengen bereits getroffen ist, die erforderlichen Produktionsfaktoren nach Art und Menge bereitstehen und der geplante Produktionsprozess die kostengünstigste Realisierung des optimalen Produktionsprogramms gewährleistet. Andererseits ist aber bei der Behandlung des Problems der optimalen Verfahrenswahl klar geworden, dass diese eventuell von der Größenordnung der auszubringenden Erzeugnismengen abhängt und daher erst erfolgen kann, wenn die durch das Produktionsprogramm bestimmten Gütermengen erkennen lassen, ob sie unter- oder oberhalb der für einen Vergleich entscheidenden kritischen Mengen liegen werden.

Nach der Festlegung der zu produzierenden Gütermengen durch das Produktionsprogramm stellt sich die Aufgabe, in welchen Fertigungsgrößen und Reihenfolgen diese Mengen im Produktionsprozess unter kosten- und zeitoptimalen Gesichtspunkten hergestellt werden sollen. Die optimale Planung des Produktionsprozesses wirkt sich so unmittelbar auf die Stückkosten und Stückgewinne der Erzeugnisse aus, deren Kenntnis zur Ermittlung des gewinnmaximalen Produktionsprogramms vorausgesetzt wird.

Verfahrenswahl und Produktionsprozessplanung bedingen ihrerseits, dass das Produktionspotential nach Umfang und zeitlichem Einsatz optimal gestaltet wird, damit das Produktionsprogramm störungsfrei vollzogen werden kann. Ausfallzeiten von Maschinen und nicht ausreichend zur Verfügung stehende Werkstoffe führen dazu, dass Arbeitskräfte zeitweise untätig bleiben und die dabei anfallenden Personalkosten sich in einer Erhöhung der Stückkostensätze für die Erzeugnisse niederschlagen. Dadurch erfolgen Rückwirkungen auf die Planung des Produktionsprogramms.

Diese Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Teilplanungsproblemen im Produktionsbereich müssen gleichzeitig berücksichtigt werden, wenn die Planungen aller Aufgaben in der Produktion optimal aufeinander abgestimmt sein sollen und dadurch ein Gesamt optimum in der betrieblichen Leistungserstellung erreicht werden soll. Die notwendige gleichzeitige Koordinierung aller Teilplanungsprobleme mit dem Ziel, im Produktionsbereich ein Gesamtoptimum bei der Lösung aller mit der Gütererstellung verbundenen Teilaufgaben zu erhalten, geschieht mit Hilfe der **Simultanplanung**.

Die Simultanplanung ist dabei jedoch nicht allein auf die Aufgaben im Produktionsbereich beschränkt. Da der Produktionsbereich in die übrigen Unternehmensbereiche eingebettet ist, stellt sich im Allgemeinen das Problem der Simultanplanung bei der planerischen Gestaltung aller Unternehmensbereiche und deren Abstimmung aufeinander. Wir wollen uns aber hier bei den kurzen Betrachtungen von Schwierigkeiten, die eine Simultanplanung aufwerfen kann, auf die planerischen Aufgaben in der Produktion beschränken.

Die nur beispielhaften Andeutungen zu den vielfältigen Zusammenhängen zwischen den Teilplanungsproblemen der Produktion und ihren unterschiedlich differenzierten Unterfunktionen lassen vermuten, dass die Simultanplanung schon im Produktionsbereich zu erheblichem Aufwand führen kann, der sich nur schwerlich oder sogar überhaupt nicht bewältigen lässt. Dabei können der Simultanplanung zweierlei Grenzen gesetzt sein. Sie kann zum einen dadurch beschränkt werden, dass eine vollständige Erfassung der Interdependenzen zwischen den produktionswirtschaftlichen Teilaufgaben unmöglich ist und damit bestimmte Einflussfaktoren vernachlässigt werden müssen, die jedoch auf die optimale Lösung des Gesamtplanungsproblems einen wesentlichen Effekt haben können. Zum anderen können bei vollständiger Erfassung aller Teil- und Unterfunktionen sowie ihrer gegenseitigen Einwirkungen solch komplexe Problemstrukturen entstehen, dass diese sich entweder nicht mehr praktikabel in einem Gesamtmodell abbilden lassen oder im Rahmen des Modells zur Bestimmung des Gesamtoptimums keine oder nur unzulänglich geeignete Lösungsverfahren zur Verfügung stehen.

Beispiele für derartige Schwierigkeiten sind die Tatsachen, dass für die simultane Programm- und Prozessplanung zurzeit noch keine allgemeinen Lösungsmethoden existieren, die gleichzeitige Behandlung der Termin- und Reihenfolgeplanung in einem einheitlichen mathematischen Entscheidungsmodell bisher noch ungelöst ist und die Lösungsverfahren in der Maschinenbelegungsplanung bei einer geringfügigen Erhöhung der Maschinen- und Auftragszahlen sehr rasch einen unververtretbaren Zeitaufwand erfordern oder schon bei durchaus praxisrelevanten Fällen der Bearbeitung von etwa 12 Aufträgen auf 8 Maschinen fast gänzlich versagen.

Das Unternehmen wird bei solchen Schwierigkeiten der simultanen Produktionsplanung zunächst einmal bemüht sein, das Teilproblem vorab so weit wie möglich optimal zu lösen, welches ihm im Rahmen der produktionswirtschaftlichen Tätigkeiten am dring-

lichsten erscheint. Ist die Betätigung des Unternehmens beispielsweise am stärksten von der Aufnahmefähigkeit des Marktes begrenzt, so wird es zuerst den Absatzplan und damit das Produktionsprogramm festlegen. In einem nächsten Schritt folgt dann etwa die Auswahl des Produktionsverfahrens, das langfristig angewendet werden soll, und im Anschluss daran wird es sich erst um die Bereitstellung der Produktionsfaktoren und die Planung des Produktionsprozesses kümmern. Diese schrittweise Planung einzelner miteinander verbundener Teilplanungsprobleme bezeichnet man als **Sukzessivplanung**.

Bei der Sukzessivplanung werden Einflüsse, die aus zeitlich nachgeschalteten Plänen resultieren, nur überschlägig vorausgeschätzt und dann als Datum behandelt. Dabei wird man bemüht sein, die Teilpläne möglichst flexibel zu halten, um durch sukzessive Korrekturen der Daten die Abstimmung der einzelnen Teilpläne aufeinander zu ermöglichen. So kann das Unternehmen auf der Grundlage bisheriger alter Stückkostensätze für die einzelnen im Sortiment befindlichen Güterarten bei unveränderten Absatzpreisen schon einmal vorweg deren Mengen im Produktionsprogramm festlegen. Stellt sich dann bei der Planung des Produktionsprozesses heraus, dass aufgrund produktionstechnischer Bedingungen die Stückkosten für einzelne Erzeugnisse höher veranschlagt werden müssen, so wird das Produktionsprogramm in seiner vorher losen Fixierung revidiert.

Durch diese Vorgehensweise wird das Unternehmen in der Regel keinen optimalen Gesamtplan erhalten, der die vielfältigen Interdependenzen zwischen den Teilproblemen widerspiegelt. Dennoch ist die Sukzessivplanung der Simultanplanung in den Fällen vorzuziehen, in denen entweder die **Zahl der Variablen und Daten** so groß ist, dass ihre gleichzeitige Behandlung in einem Optimierungsmodell noch nicht möglich bzw. unwirtschaftlich ist, oder sich die **Unsicherheit** der Daten eines Teilproblems auf die Gesamtplanung auswirkt. Grundsätzlich ist also von dem Gedanken der theoretisch exakten Simultanplanung bei der Lösung aller Teilaufgaben im Produktionsbereich auszugehen, so weit die konkrete Entscheidungssituation die Verwirklichung dieses Planungskonzeptes zulässt. Stehen dem unüberwindbare Schwierigkeiten entgegen, so tritt die Sukzessivplanung an die Stelle der Simultanplanung.

Graphische Produktionsprogrammplanung

Beispiel 1:

Ein Zweiproduktunternehmen benötigt zur Herstellung der Gütermengen x_1 und x_2 drei Einsatzfaktoren r_1 , r_2 und r_3 . Auf Grund vorheriger Produktionserfahrungen hat sich herausgestellt, dass zur Produktion jeder Mengeneinheit des Gutes 1 eine Einheit des Faktors 1, 5 Einheiten des Faktors 2 und 3 Einheiten des Faktors 3 nötig sind. Zur Produktion einer Einheit des Gutes 2 werden dagegen 1 Einheit des Faktors 1, 3 Einheiten des Faktors 2 und 5 Einheiten des Faktors 3 benötigt. Für das Gut 1 kann bei Stückkosten $k_1 = 29,00 \text{ GE}$ ein Verkaufspreis $p_1 = 36,00 \text{ GE}$ erzielt werden. Für das Gut 2 betragen die Größen $k_2 = 25,00 \text{ GE}$ und $p_2 = 35,00 \text{ GE}$.

Wie soll das Produktionsprogramm aussehen, damit bei gegebenen Ressourcen

$$\bar{r}_1 = 20 \text{ Einheiten}$$

$$\bar{r}_2 = 90 \text{ Einheiten}$$

$$\bar{r}_3 = 90 \text{ Einheiten}$$

dieses Unternehmen seinen Gewinn maximiert?

Tabelle 1: Übersicht der gegebenen Daten

	x_1	x_2	\bar{r}_i
r_1	$a_{11} = 1$	$a_{12} = 1$	20
r_2	$a_{21} = 5$	$a_{22} = 3$	90
r_3	$a_{31} = 3$	$a_{32} = 5$	90
k_j	29	25	
p_j	36	35	

Zuerst stellen wir den Produktraum durch ein Koordinatenkreuz dar, wobei wir die Mengen x_2 des Gutes 2 auf der Abszisse und die Menge x_1 des Gutes 1 auf der Ordinate auftragen. Dieser Produktraum enthält alle Kombinationen von x_1 und x_2 . Unter Beachtung der Nichtnegativitätsbedingungen können x_1 und x_2 nur positive Werte annehmen. Dann stellen wir die Kapazitätsrestriktionen mit Hilfe der Angaben über die Produktionskoeffizienten a_{ij} ($i=1, 2, 3$ und $j=1, 2$) und die Einsatzhöchstmengen ($\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$) in Form von Ungleichungen auf:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq \bar{r}_1 \quad \text{oder} \quad x_1 + x_2 \leq 20 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq -x_2 + 20 \quad (\text{I})$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq \bar{r}_2 \quad \text{oder} \quad 5x_1 + 3x_2 \leq 90 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq -\frac{3}{5}x_2 + 18 \quad (\text{II})$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq \bar{r}_3 \quad \text{oder} \quad 3x_1 + 5x_2 \leq 90 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq -\frac{5}{3}x_2 + 30 \quad (\text{III})$$

Diese Beschränkungen tragen wir in den Produktraum ein. Dabei verfährt man beispielsweise für die erste Ungleichung wie folgt: Aus $x_1 + x_2 \leq 20$ erhält man $x_1 \leq -x_2 + 20$; dies ist aber nichts anderes als die Fläche im x_1, x_2 -Koordinatensystem, die links unterhalb der Geraden $x_1 = -x_2 + 20$ liegt. Alle Kombinationen in diesem Raum könnte man produzieren, wenn zur Produktion nur der Produktionsfaktor r_1 benötigt würde. Auf entsprechende Weise tragen wir die beiden anderen Restriktionen ein. Dadurch gewinnen wir den beschränkten Produktraum, der alle Mengenkombinationen von x_1 und x_2 enthält, die unter den gegebenen Ressourcen \bar{r}_1, \bar{r}_2 und \bar{r}_3 herstellbar sind. Er ist durch die grau hinterlegte Fläche A B C D O in der Abbildung 2 dargestellt.

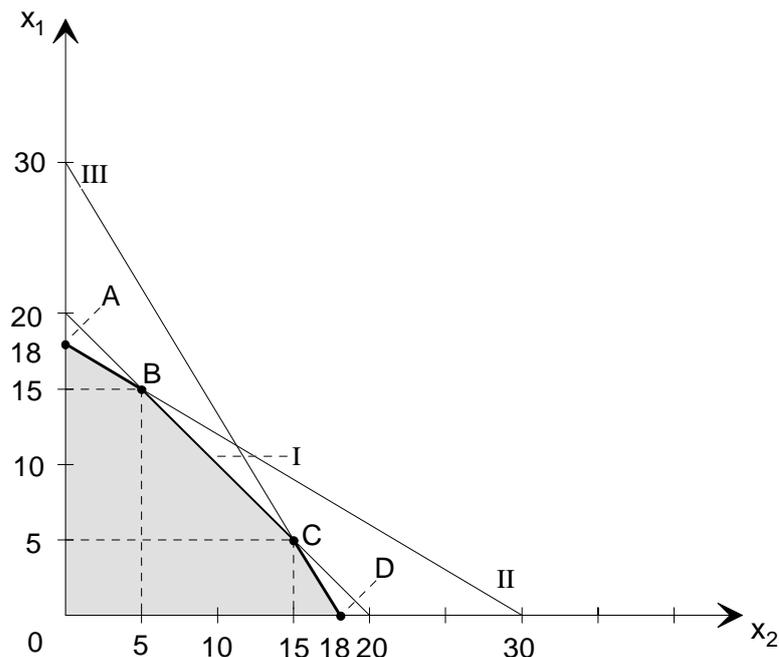


Abbildung 2: Darstellung des beschränkten Produktraumes A B C D O

Schließlich stellen wir die Gewinnfunktion auf:

$$Q = x_1(p_1 - k_1) + x_2(p_2 - k_2) \\ = 7x_1 + 10x_2.$$

Diese Funktion stellt für unterschiedliche Gewinnniveaus \bar{Q} in dem x_1, x_2 -Koordinatensystem eine Schar von Geraden dar, deren Steigung $-\frac{10}{7}$ beträgt; denn aus

$$\bar{Q} = 7x_1 + 10x_2 \text{ folgt } x_1 = -\frac{10}{7}x_2 + \frac{1}{7}\bar{Q}.$$

Diese Geradenschar besitzt die Eigenschaft, dass der Wert von Q umso größer wird, je weiter die Gerade vom Nullpunkt entfernt liegt. Die Lösung dieses Problems erhält man also dadurch, dass man den Punkt im beschränkten Produktraum ausfindig macht, der gleichzeitig auf der vom Nullpunkt am weitesten entfernten Gewinngeraden liegt. Eine beliebige Gewinngerade aus der Geradenschar wird dazu parallel verschoben, bis sie den beschränkten Produktraum in einem Punkt (in mehreren Punkten) gerade noch tangiert (Parallelverschiebung nach rechts, vgl. Abbildung 3). Dieser Punkt gibt dann das gewinnmaximale Produktionsprogramm an. Abbildung 3 zeigt das gewinnmaximale Programm (Punkt C), bei dem 5 Einheiten von Gut 1 und 15 Einheiten von Gut 2 hergestellt werden. Der maximale Gewinn beträgt in diesem Beispiel $Q_{max} = 185,00$ GE. Dabei stellt man fest, dass beide Güter erzeugt werden, obwohl das Gut 2 im Vergleich zum Gut 1 einen deutlich höheren Stückgewinn erzielt. Würde man zum Beispiel nur Gut 2 herstellen, so könnte man unter den gegebenen Ressourcen 18 Einheiten von Gut 2 herstellen. Der Gewinn würde hier aber nur 180,00 GE betragen.

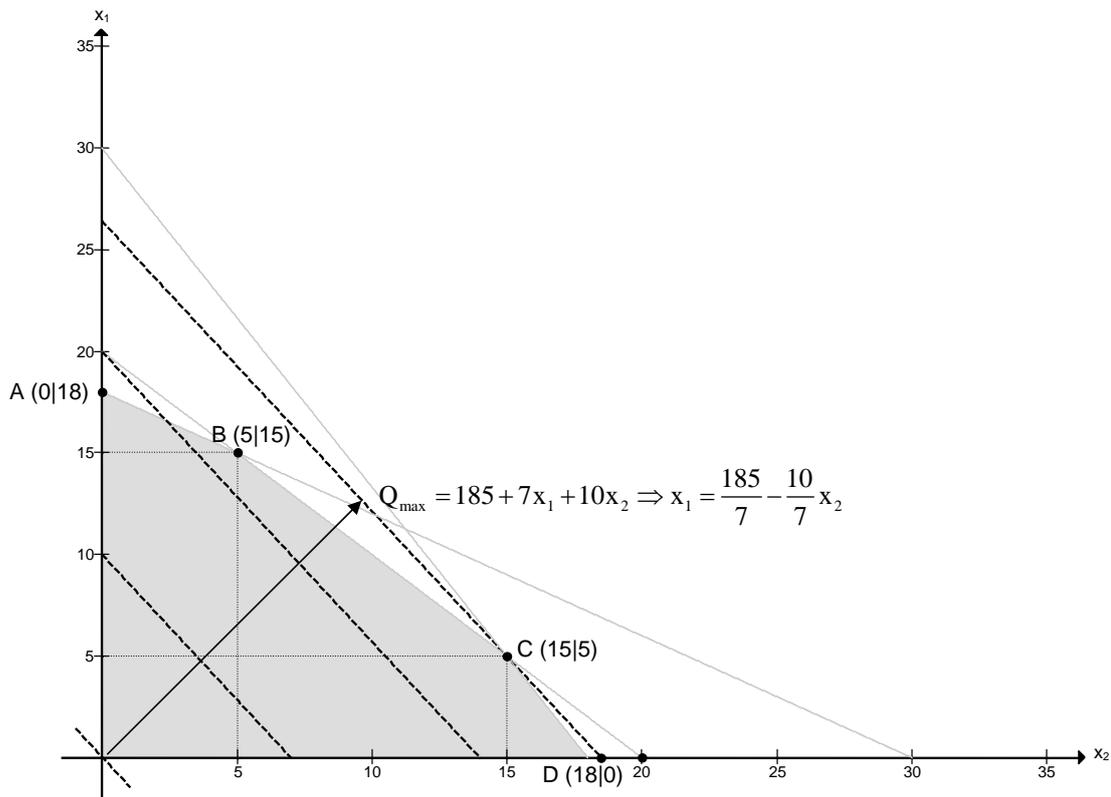


Abbildung 3: Ermittlung des Produktionsprogramms mit Hilfe der Gewinneraden

Optimaler Einsatz von Mehrarbeitszeit

Ein Unternehmen, das jeweils für eine Woche (40 Arbeitsstunden) plant, produziert vier Produkte j , $j=1,2,3,4$, auf drei Maschinen i , $i=1,2,3$. Während die Kapazitäten der Maschine 2 und 3 ausreichend groß sind, stellt die Maschine 1 den Engpass dar. x_j bezeichne die Menge des Produktes j , c_j seinen Deckungsbeitrag, wobei gelten möge

$$c_1 = 40 \text{ GE}, \quad c_2 = 30 \text{ GE}, \quad c_3 = 50 \text{ GE}, \quad c_4 = 100 \text{ GE}.$$

Die Produktionskoeffizienten a_{1j} der Produkte j auf der Maschine 1 werden in Minuten pro Stück gemessen und sind gegeben durch

$$a_{11} = 10, \quad a_{12} = 10, \quad a_{13} = 20, \quad a_{14} = 50.$$

Als Absatzhöchstmengen \bar{x}_j für die Erzeugnisse j hat man

$$\bar{x}_1 = 150, \quad \bar{x}_2 = 40, \quad \bar{x}_3 = 50, \quad \bar{x}_4 = 150.$$

Die Kapazität der Arbeitskraft zur Bedienung der Maschine 1 beträgt bei der 40-Stundenwoche

$$\bar{r}_1^A = 2400 \text{ Minuten.}$$

Das gewinnmaximale Produktionsprogramm lässt sich bei diesen Daten und einem Engpass iterativ mit Hilfe relativer Deckungsbeiträge bestimmen. Unter dem **relativen Deckungsbeitrag** c_{ij}^r eines Produktes j bezüglich einer Maschine i versteht man den Deckungsbeitrag des Produktes j je Zeiteinheit Maschinenbeanspruchung der Maschine i ; er gibt an, welchen Deckungsbeitrag der Einsatz der Maschine i bei Herstellung des Produktes j je Zeiteinheit erbringt, d.h.

$$(23) \quad c_{ij}^r = \frac{c_j}{a_{ij}}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Aus dieser Beziehung erhält man die folgenden relativen Deckungsbeiträge der Produkte j , $j = 1, \dots, 4$, bezüglich der Maschine 1:

$$c_{11}^r = 4,00 \frac{GE}{Min.}, \quad c_{12}^r = 3,00 \frac{GE}{Min.},$$

$$c_{13}^r = 2,50 \frac{GE}{Min.}, \quad c_{14}^r = 2,00 \frac{GE}{Min.}.$$

Diese relativen Deckungsbeiträge geben Aufschluss über die gewinnmaximale Verteilung der knappen Kapazität des Betriebsmittels 1 auf die verschiedenen Produkte im Rahmen des optimalen Produktionsprogramms. Man erzeugt nämlich die Produkte in der Reihenfolge der Höhe ihrer relativen Deckungsbeiträge, bis ihre Absatzhöchstmengen erreicht sind bzw. die Kapazitäten der Maschine ausgeschöpft ist (siehe Tabelle 4).

Tab. 2: Bestimmung des gewinnmaximalen Produktionsprogramms mit Hilfe der relativen Deckungsbeiträge bei einem Engpass

j	\bar{x}_j	a_{1j}	c_j	$c_{1j}^r = \frac{c_j}{a_{1j}}$	x_j	Beanspruchte Kapazität $a_{1j} \cdot x_j$	Restkapazität $r_1^R = \bar{r}_1^A - \sum_{j=1}^4 a_{1j} \cdot x_j$
1	150	10	40	4	150	1500	900
2	40	10	30	3	40	400	500
3	50	20	50	2,5	25	500	0
4	150	50	100	2	0	0	0

In der Tabelle 2 sind die **Iterationsschritte** aufgeführt. Zuerst listet man die Produkte in der Reihenfolge der Höhe ihres jeweiligen relativen Deckungsbeitrags bezüglich Maschine 1 auf. Man wird nun das Erzeugnis 1 mit dem höchsten relativen Deckungsbeitrag solange herstellen, bis seine Absatzhöchstmenge $\bar{x}_1 = 150$ erreicht ist. Genauso verfährt man mit Produkt 2. Für die Güter 3 und 4 verbleiben nur noch 500 Minuten Restkapazität; damit

erzeugt man 25 Einheiten des Produkts 3. Das gewinnmaximale Produktionsprogramm lautet also:

$$x_1^* = 150, \quad x_2^* = 40, \quad x_3^* = 25, \quad x_4^* = 0.$$

Liegen mehrere Engpässe vor, so muss das Produktionsprogramm simultan mit dem Einsatz von Mehrarbeitszeiten optimiert werden. Hinsichtlich der Zuordnung von Mehrarbeitszeiten und Fertigungsstellen unterscheidet man dabei zwei Extremfälle:

- den Spezialistenfall, bei dem jede Arbeitskraft einer bestimmten Fertigungsstelle zugeordnet ist, und
- den Universalistenfall, bei dem Flexibilität des Arbeitseinsatzes in dem Sinne vorliegt, dass die Arbeitskräfte an allen Fertigungsstellen untereinander austauschbar sind.

Beide Problemvarianten lassen sich mit Hilfe der linearen Programmierung lösen; wir wollen uns hier mit dem Spezialistenfall begnügen. Der lineare Planungsansatz für diesen Fall lautet:

$$(25) \quad \max Q = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j - \sum_{i=1}^m \sum_{\mu=1}^v dr_i^{A\mu} \cdot dk_i^\mu$$

unter den Nebenbedingungen

$$(26) \quad \left. \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq \bar{r}_i^A + \sum_{\mu=1}^v dr_i^{A\mu}, \quad i = 1, \dots, m, \right\} \text{Kapazitätsbeschränkungen}$$

$$(27) \quad \left. dr_i^{A\mu} \leq \bar{r}_i^{A\mu}, \quad i = 1, \dots, m, \mu = 1, \dots, v, \right\} \text{Absatzbeschränkungen}$$

$$(28) \quad x_j \leq \bar{x}_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{Absatzbeschränkungen}$$

$$(29) \quad x_j, dr_i^{A\mu} \geq 0 \quad \text{Nicht-Negativitätsbedingung}$$

Dazu bezeichnen

c_j den Deckungsbeitrag des Produkts j ; er entspricht der Differenz zwischen dem Absatzpreis des Produkts j und dessen variablen Stückkosten bei **Normalarbeitszeit**,

x_j die Menge des Produktes j , $j = 1, \dots, n$,

\bar{r}_i^A die Kapazität der Arbeitskraft zur Bedienung der Maschine i , $i = 1, \dots, m$,

$dr_i^{A\mu}$ die Kapazitätzunahme der Arbeitskraft zur Bedienung der Maschine i beim Einsatz der Mehrarbeitszeit μ , $\mu = 1, \dots, v$,

dk_i^μ den Grenzkostensprung der Fertigungsstelle (Maschine) i beim Einsatz der Mehrarbeitszeit μ ,

a_{ij} den Produktionskoeffizienten des Produktes j auf der Maschine i ,

\bar{x}_j die Absatzhöchstgrenze des Produktes j ,

$\bar{r}_i^{A\mu}$ die maximale Mehrarbeitszeit der Maschine i beim Einsatz der Mehrarbeitszeit μ .

In der Zielfunktion (25) ist der Gewinn Q dadurch definiert, dass alle Produktionsmengen - also auch die, die in Mehrarbeitszeiten hergestellt sind, - zunächst mit den **Deckungsbeitragssätzen bei Normalarbeitszeit** bewertet werden und man dann von diesen Deckungsbeiträgen die **Zusatzkosten der eingesetzten verschiedenen Mehrarbeitszeiten** abzieht. Beide Betrachtungsweisen der Gewinnermittlung bei Überstunden sind äquivalent und führen zum selben Ergebnis. Die Bedingungen (26) fordern, dass die **Gesamtkapazität** der Ressource i durch die Beanspruchung der hergestellten Produktmengen nicht überschritten werden darf. Dabei setzt sich die Gesamtkapazität jedes Faktors aus seiner **Normalkapazität** und der **Summe der Zusatzkapazitäten** infolge der Mehrarbeitszeiten zusammen. Die unterschiedlichen Formen der Überstunden sind nach den Bedingungen (27) zeitlich begrenzt.